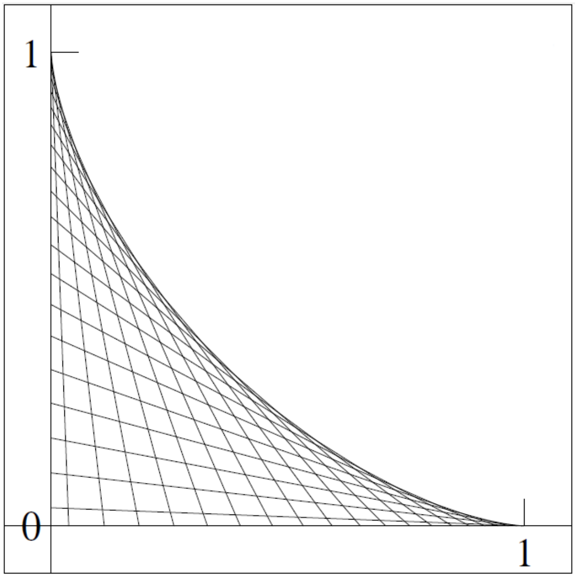
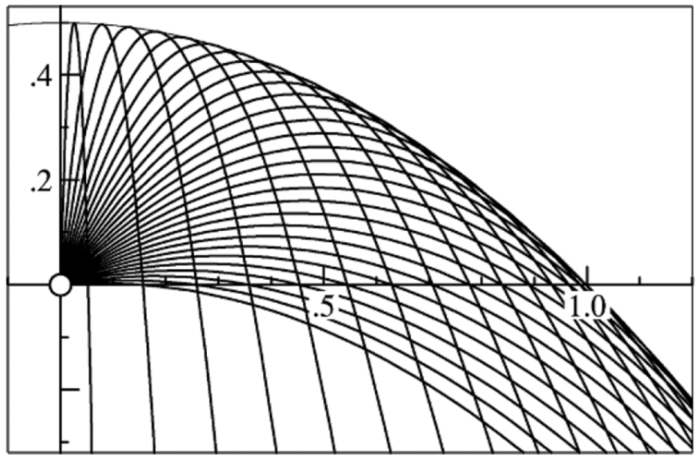
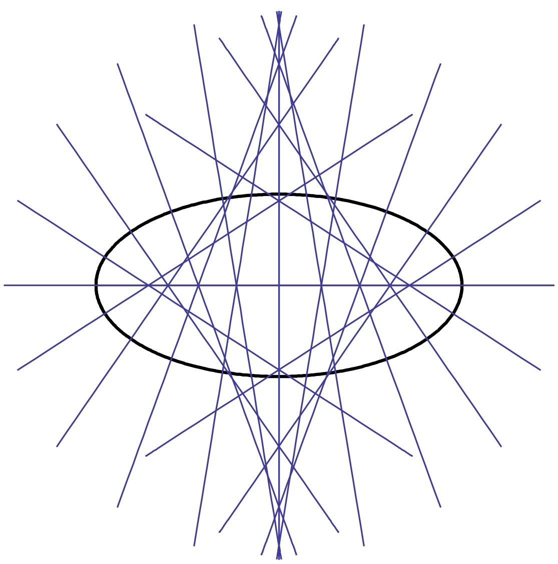
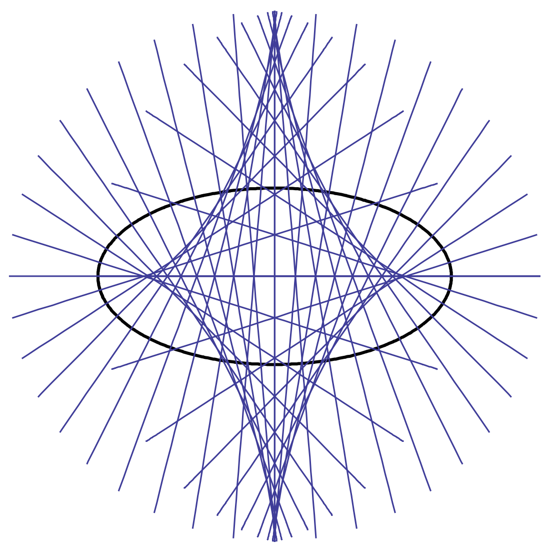
Obálky soustav rovinných křivek







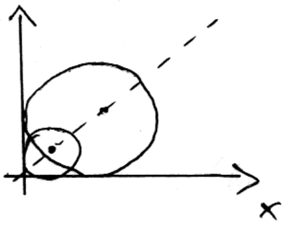


OBÁLKY SOUSTAV ROVINNÝCH KŘIVEK

def: Soustava rovinných křivek je spojité diferencovatelné zobrazení $c : \Lambda \times I \to \mathbb{R}^2$, kde $\Lambda, I \subset \mathbb{R}$ jsou intervaly.

Interpretace: $\lambda \in \Lambda$ je parametr, $t \mapsto c(\lambda, t)$, $t \in I$, je jedna z křivek dané soustavy

př: $c(\lambda, t) = \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$, $\lambda \in (0, \infty)$, $t \in [0, 2\pi]$

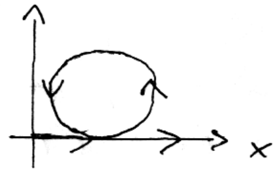


Předběžná definice: Křivka e je obálkou soustavy křivek c, je-li každý její bod bodem dotyku s některou křivkou této soustavy.

Tedy $e : J \to \mathbb{R}^2$, kde $\forall u \in J$ $e(u) = c(\lambda(u), t(u))$.
Definujme-li $\varphi : J \to \Lambda \times I$ předpisem $\varphi(u) = (\lambda(u), t(u))$, pak $e = c \circ \varphi$.

Zpět k příkladu:

- kladná poloosa x je obálka: $\lambda(u) = u$, $t(u) = \frac{3\pi}{2}$,
  $e(u) = \begin{pmatrix} u \\ u \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix}$
- kladná poloosa y je obálka: $\lambda(u) = u$, $t(u) = \pi$,
  $e(u) = \begin{pmatrix} u \\ u \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ u \end{pmatrix}$
- existují i další obálky:



Těmto případům se chceme vyhnout, zpřesníme definici.

def: Křivka $e = c \circ \varphi$, kde $\varphi : J \to \Lambda \times I$, $\varphi(u) = (\lambda(u), t(u))$, je obálkou soustavy c, platí-li:

(1) $\forall u \in J$ se e v bodě $e(u)$ dotýká křivky $t \mapsto c(\lambda(u), t)$ (bod dotyku je $c(\lambda(u), t(u)) = c(\varphi(u)) = e(u)$), tj. $\forall u \in J$ $e'(u) \parallel \frac{\partial c}{\partial t}(\lambda(u), t(u))$.

(2) Funkce λ není konstantní na žádném netriviálním podintervalu intervalu J.

def | singulární množina soustavy křivek c je množina

$$S = \{ (\lambda, t) \in \Lambda \times I : \frac{\partial c}{\partial \lambda}(\lambda, t) \text{ a } \frac{\partial c}{\partial t}(\lambda, t) \text{ jsou lin. závislé vektory} \} \subset \mathbb{R}^2$$

ekvivalentně:

$$S = \{ (\lambda, t) \in \Lambda \times I : \det \left(\frac{\partial c}{\partial \lambda}(\lambda, t), \frac{\partial c}{\partial t}(\lambda, t) \right) = 0 \}$$

Pozn. | S je uzavřená množina v $\mathbb{R}^2$

$$S = F^{-1}(\{0\}), \quad \text{kde} \quad F(\lambda, t) = \det \left(\frac{\partial c}{\partial \lambda}(\lambda, t), \frac{\partial c}{\partial t}(\lambda, t) \right)$$

uzavřená množina spojitá funkce

věta | nechť $\varphi : J \to \Lambda \times I$, $\varphi(u) = (\lambda(u), t(u))$.

Pak $e = c \circ \varphi$ je obálkou soustavy c $\Leftrightarrow$ obraz φ leží v singulární množině a platí (2).

Dk |
$$e(u) = c(\varphi(u)) = c(\lambda(u), t(u))$$

$$e'(u) = \frac{\partial c}{\partial \lambda}(\lambda(u), t(u))\, \lambda'(u) + \frac{\partial c}{\partial t}(\lambda(u), t(u))\, t'(u)$$

$\Leftarrow$ obraz $\varphi \subset S \Rightarrow \forall u \in J \ \det\left(\frac{\partial c}{\partial \lambda}(\lambda(u), t(u)), \frac{\partial c}{\partial t}(\lambda(u), t(u))\right) = 0$

$$\Rightarrow \det \Big(\underbrace{\frac{\partial c}{\partial \lambda}(\lambda(u), t(u))\, \lambda'(u) + \frac{\partial c}{\partial t}(\lambda(u), t(u))\, t'(u)}_{e'(u)}, \frac{\partial c}{\partial t}(\lambda(u), t(u)) \Big) = 0$$

$\Rightarrow$ platí (1)

$\Rightarrow$ platí (1) $\Rightarrow \forall u \in J \ \det\left(e'(u), \frac{\partial c}{\partial t}(\lambda(u), t(u))\right) = 0$

$$\Rightarrow \det\left(\frac{\partial c}{\partial \lambda}(\lambda(u), t(u))\, \lambda'(u) + \frac{\partial c}{\partial t}(\lambda(u), t(u))\, t'(u), \frac{\partial c}{\partial t}(\lambda(u), t(u)) \right) = 0$$

$$\Rightarrow \det\left(\frac{\partial c}{\partial \lambda}(\lambda(u), t(u))\, \lambda'(u), \frac{\partial c}{\partial t}(\lambda(u), t(u)) \right) = 0$$

Pokud $\lambda'(u) \neq 0$, pak $(\lambda(u), t(u)) \in S$.

Pokud $\lambda'(u) = 0$, pak $\exists \{u_m\}_{m=1}^{\infty} \subset J$, $u_m \to u$,

$\forall m \in \mathbb{N}$ $\lambda'(u_m) \neq 0$, tj. $(\lambda(u_m), t(u_m)) \in S$

z uzavřenosti S plyne $(\lambda(u), t(u)) \in S$. $\square$

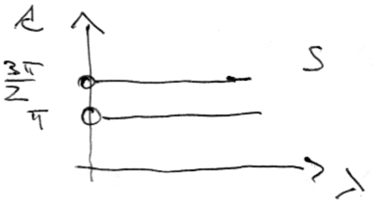
př)

$$c(\lambda, s) = \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} \cos s \\ \sin s \end{pmatrix}, \quad \lambda \in (0,\infty), \; s \in [0, 2\pi]$$

$$\frac{\partial c}{\partial \lambda}(\lambda, s) = \begin{pmatrix} 1+\cos s \\ 1+\sin s \end{pmatrix} \qquad \frac{\partial c}{\partial s}(\lambda, s) = \lambda \begin{pmatrix} -\sin s \\ \cos s \end{pmatrix}$$

$$0 = \det\left(\frac{\partial c}{\partial \lambda}(\lambda,s), \frac{\partial c}{\partial s}(\lambda,s)\right) = \lambda\left(\cos s + \cos^2 s + \sin s + \sin^2 s\right) =$$
$$= \lambda\left(1 + \cos s + \sin s\right) = \lambda\left(1 + \sqrt{2}\,\sin\left(s + \frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} = \sin\left(s + \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow s + \frac{\pi}{4} = \begin{cases} \frac{5\pi}{4} \\ \frac{7\pi}{4} \end{cases} \Rightarrow s = \begin{cases} \pi \\ \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$



Jaké linky leží v S?

- $\varphi_1(u) = \begin{pmatrix} u \\ \pi \end{pmatrix}, \; u \in (0,\infty)$

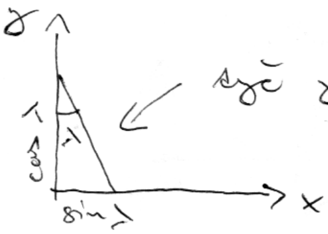
  $e(u) = c(u, \pi) = \begin{pmatrix} 0 \\ u \end{pmatrix}$ ... kladná poloosa y

- $\varphi_2(u) = \begin{pmatrix} u \\ \frac{3\pi}{2} \end{pmatrix}, \; u \in (0,\infty)$

  $e(u) = c\left(u, \frac{3\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix}$ ... kladná poloosa x

Podmínka (2) je v obou případech splněna.

př (stahovací tyče)



tyč jednotkové délky

$$\lambda \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$c(\lambda, s) = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos\lambda \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} \sin\lambda \\ -\cos\lambda \end{pmatrix}, \quad s \in [0, 1]$$

$$\frac{\partial c}{\partial \lambda}(\lambda, s) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin\lambda \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} \cos\lambda \\ \sin\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s\cos\lambda \\ (s-1)\sin\lambda \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial c}{\partial s}(\lambda, s) = \begin{pmatrix} \sin\lambda \\ -\cos\lambda \end{pmatrix}$$

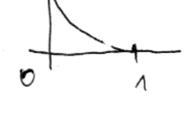
$$0 = \det\left(\frac{\partial c}{\partial \lambda}(\lambda,s), \frac{\partial c}{\partial s}(\lambda,s)\right) = -s\cos^2\lambda - (s-1)\sin^2\lambda = -s + \sin^2\lambda$$

$s = \sin^2\lambda$ ... singulární množina, graf funkce $\sin^2$

parametricky: $\varphi(u) = \begin{pmatrix} u \\ \sin^2 u \end{pmatrix}, \; u \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

$$e(u) = c(\varphi(u)) = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos u \end{pmatrix} + \sin^2 u \begin{pmatrix} \sin u \\ -\cos u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin^3 u \\ \cos^3 u \end{pmatrix}, \; u \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

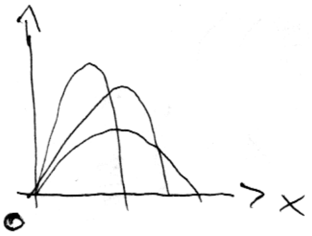
... část asteroidy v 1. kvadrantu (implicitně $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$)



(připomenutí: speciální případ hypocykloidy, $R = 4r$
... zde $R = 1$, $r = \frac{1}{4}$)

př. (obálka parabol)

Střelba z děla v bodě $[0,0]$ jednotkovou rychlostí všemi směry odpovídajícími úhlům $\lambda \in (0, \frac{\pi}{2})$. Jaké cíle lze zasáhnout? BÚNO $g = 1$ (vhodná volba jednotek)



$$c(\lambda, t) = \begin{pmatrix} \cos\lambda \\ \sin\lambda \end{pmatrix} t - \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{t^2}{2} \end{pmatrix}, \quad t \in [0, \infty)$$

rovnoměrný přímočarý pohyb

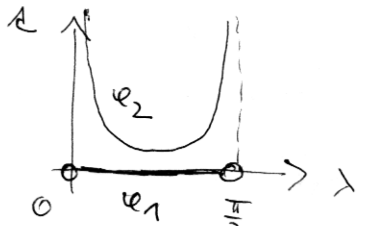
volný pád

$$\frac{\partial c}{\partial \lambda}(\lambda, t) = t \begin{pmatrix} -\sin\lambda \\ \cos\lambda \end{pmatrix} \qquad \frac{\partial c}{\partial t}(\lambda, t) = \begin{pmatrix} \cos\lambda \\ \sin\lambda - t \end{pmatrix}$$

$$0 = \det\left(\frac{\partial c}{\partial \lambda}(\lambda, t), \frac{\partial c}{\partial t}(\lambda, t)\right) = -t\sin^2\lambda + t^2\sin\lambda - t\cos^2\lambda = t^2\sin\lambda - t$$

$\Rightarrow$ $t = 0$, $\lambda \in (0, \frac{\pi}{2})$

$t = \frac{1}{\sin\lambda}$



$$\varphi_1(u) = \begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix} \qquad e(u) = c(\varphi_1(u)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ ... není křivka}$$

$$\varphi_2(u) = \begin{pmatrix} u \\ \frac{1}{\sin u} \end{pmatrix} \qquad e(u) = c(\varphi_2(u)) = \begin{pmatrix} \cos u \\ \sin u \end{pmatrix} \frac{1}{\sin u} - \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2\sin^2 u} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \operatorname{cotg} u \\ 1 - \frac{1}{2\sin^2 u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{cotg} u \\ \frac{1}{2}(1 - \operatorname{cotg}^2 u) \end{pmatrix}$$

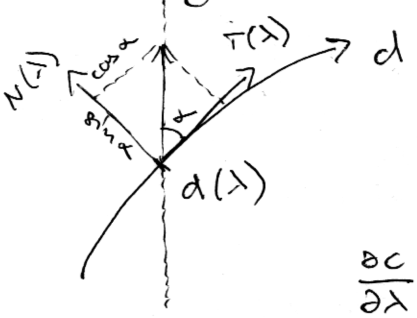
protože $\sin^2 u + \cos^2 u = 1 \quad / \cdot \frac{1}{\sin^2 u}$

$$1 + \operatorname{cotg}^2 u = \frac{1}{\sin^2 u}$$

Křivku e lze vyjádřit jako graf funkce $y = \frac{1}{2}(1 - x^2)$ $\Rightarrow$ je to parabola.

př. (evolutoida)

Dána křivka $d: I \to \mathbb{R}^2$ a číslo $\alpha \in [0, 2\pi]$. Jak vypadá obálka soustavy přímek, které procházejí body křivky d a svírají s sečnami úhel α?



$$c(\lambda, s) = d(\lambda) + s\left(T(\lambda)\cos\alpha + N(\lambda)\sin\alpha\right),$$
$$\lambda \in I, \quad s \in \mathbb{R}$$

$$\frac{\partial c}{\partial \lambda}(\lambda, s) = T(\lambda)\,\|d'(\lambda)\| + s\,\kappa(\lambda)N(\lambda)\,\|d'(\lambda)\|\cos\alpha - s\,\kappa(\lambda)T(\lambda)\,\|d'(\lambda)\|\sin\alpha$$

$$\frac{\partial c}{\partial s}(\lambda, s) = T(\lambda)\cos\alpha + N(\lambda)\sin\alpha$$

$$0 = \det\left(\frac{\partial c}{\partial \lambda}(\lambda, s), \frac{\partial c}{\partial s}(\lambda, s)\right) = \det\begin{pmatrix} \|d'(\lambda)\|(1 - s\kappa(\lambda)\sin\alpha) & \cos\alpha \\ \|d'(\lambda)\|\, s\,\kappa(\lambda)\cos\alpha & \sin\alpha \end{pmatrix} =$$

volíme soustavu souřadnic s počátkem $d(\lambda)$ a osami ve směru $T(\lambda), N(\lambda)$

$$= \|d'(\lambda)\|\left(\sin\alpha - s\kappa(\lambda)\sin^2\alpha - s\kappa(\lambda)\cos^2\alpha\right) =$$
$$= \|d'(\lambda)\|\left(\sin\alpha - s\kappa(\lambda)\right)$$

$$\Rightarrow s = \frac{\sin\alpha}{\kappa(\lambda)}$$

$$\varphi(u) = \left(u, \frac{\sin\alpha}{\kappa(u)}\right)$$

$$e(u) = c(\varphi(u)) = d(u) + \frac{\sin\alpha}{\kappa(u)}\left(T(u)\cos\alpha + N(u)\sin\alpha\right),$$
$$u \in I$$

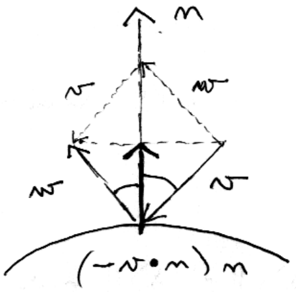
Speciální případy:

- $\alpha = 0$: $e(u) = d(u)$ -- každá křivka je obálkou svých sečen
- $\alpha = \frac{\pi}{2}$: $e(u) = d(u) + \frac{N(u)}{\kappa(u)}$ ... obálkou normál je evoluta dané křivky

Obálky v optice:

kaustika = obálka paprsků odražených od povrchu tělesa
(zdroj světla bodový nebo v nekonečnu)

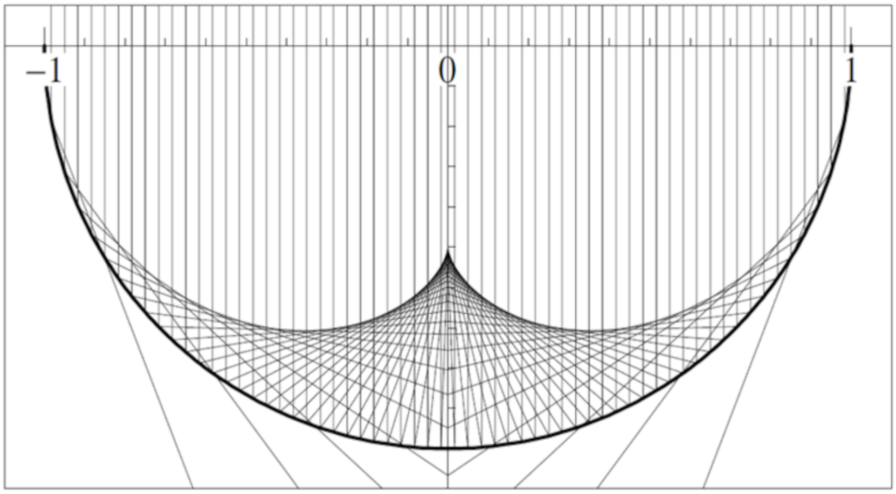
zákon odrazu: úhel dopadu = úhel odrazu

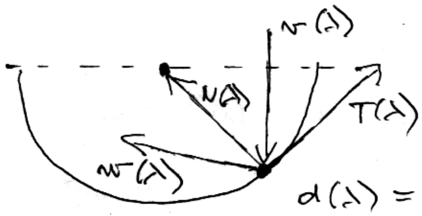


$$w = v - 2(v \bullet n)\, n$$

odražený paprsek — dopadající paprsek — normála k povrchu

př) obálka paprsků odražených od jednotkové půlkružnice, rovnoběžné paprsky přicházejí z nekonečna





$$d(\lambda) = \begin{pmatrix} \cos\lambda \\ \sin\lambda \end{pmatrix}, \quad \lambda \in (\pi, 2\pi) \qquad N(\lambda) = \begin{pmatrix} -\cos\lambda \\ -\sin\lambda \end{pmatrix}$$

$$v(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$w(\lambda) = v(\lambda) - 2\big(v(\lambda) \bullet N(\lambda)\big) N(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + 2\sin\lambda \begin{pmatrix} \cos\lambda \\ \sin\lambda \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sin 2\lambda \\ -1 + 2\sin^2\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin 2\lambda \\ -\cos 2\lambda \end{pmatrix}$$

soustava odražených paprsků:

$$c(\lambda, t) = d(\lambda) + t\, w(\lambda) = \begin{pmatrix} \cos\lambda \\ \sin\lambda \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \sin 2\lambda \\ -\cos 2\lambda \end{pmatrix}$$

$$\lambda \in (\pi, 2\pi), \quad t \in [0, \infty)$$

$$\frac{\partial c}{\partial \lambda}(\lambda, d) = \begin{pmatrix} -\sin\lambda + 2d\cos 2\lambda \\ \cos\lambda + 2d\sin 2\lambda \end{pmatrix} \qquad \frac{\partial c}{\partial d}(\lambda, d) = \begin{pmatrix} \sin 2\lambda \\ -\cos 2\lambda \end{pmatrix}$$

$$0 = \det\left(\frac{\partial c}{\partial \lambda}(\lambda, d), \frac{\partial c}{\partial d}(\lambda, d)\right) = \sin\lambda\cos 2\lambda - 2d\cos^2 2\lambda -$$

$$- \sin 2\lambda\cos\lambda - 2d\sin^2 2\lambda = \sin\lambda\cos 2\lambda - \sin 2\lambda\cos\lambda - 2d$$

$$= \sin\lambda\left(\cos^2\lambda - \sin^2\lambda - 2\cos^2\lambda\right) - 2d = -\sin\lambda - 2d$$

$$\Rightarrow d = \frac{-\sin\lambda}{2} \qquad \varphi(u) = \begin{pmatrix} u \\ -\frac{\sin u}{2} \end{pmatrix}, \quad u \in (\pi, 2\pi)$$

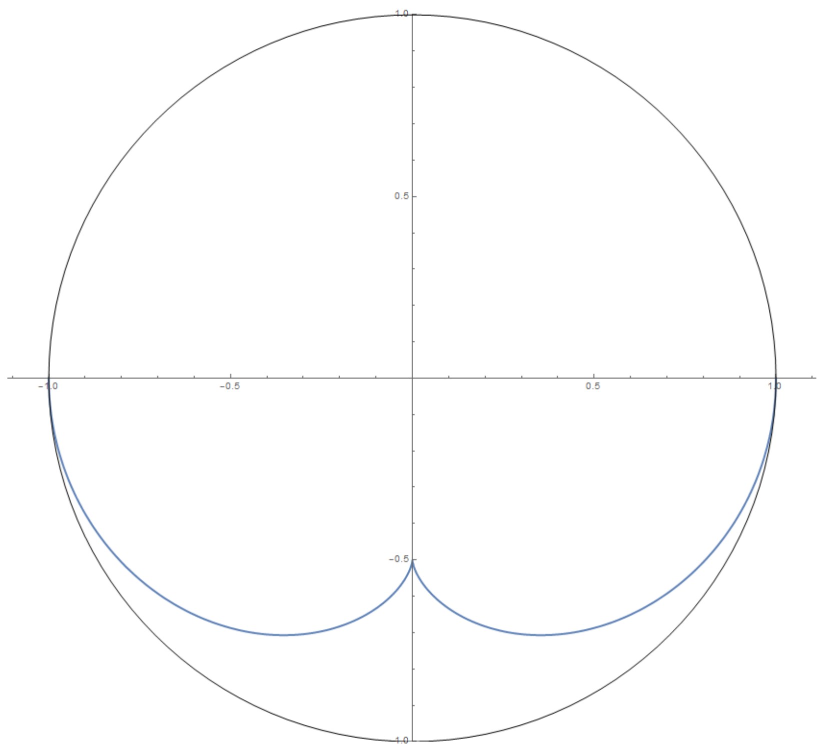
$$e(u) = c(\varphi(u)) = \begin{pmatrix} \cos u \\ \sin u \end{pmatrix} - \frac{\sin u}{2}\begin{pmatrix} \sin 2u \\ -\cos 2u \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos u - \sin^2 u\cos u \\ \sin u\left(1 + \frac{1}{2}\cos 2u\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^3 u \\ \sin u\left(1 + \frac{1}{2}\cos 2u\right) \end{pmatrix}$$

Dalšími úpravami lze převést do tvaru

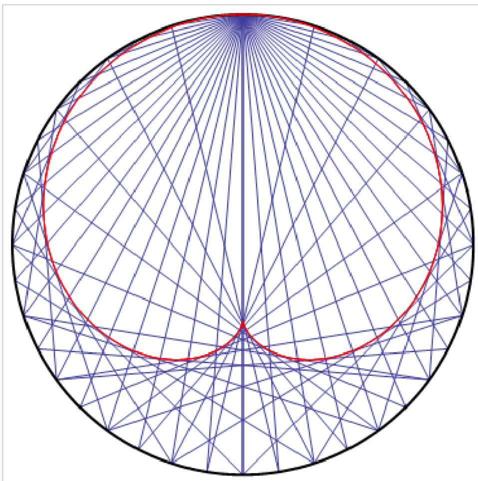
$$e(u) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3\cos u + \cos 3u \\ 3\sin u + \sin 3u \end{pmatrix}, \quad u \in (\pi, 2\pi)$$

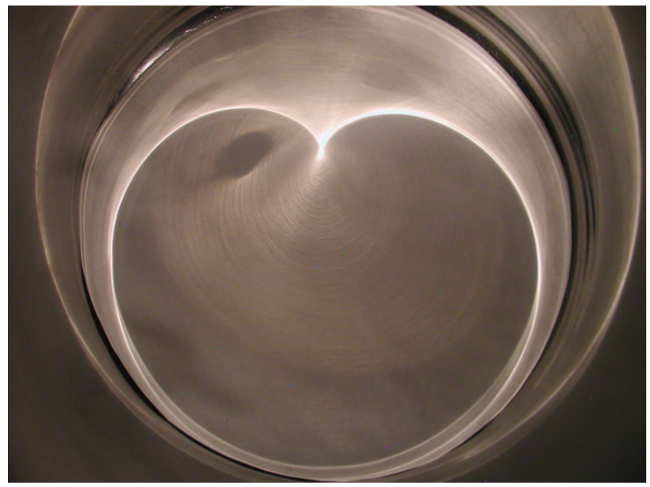
– část nefroidy (speciální případ epicykloidy, $R = 2r$, kde $R = \frac{1}{2}$, $r = \frac{1}{4}$)



Domácí cvičení (1)

1. Najděte obálku soustavy křivek $c(\lambda, t) = (\lambda \cos t, \ (1 - \lambda) \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$, $\lambda \in [0, 1]$. Načrtněte několik křivek zadané soustavy i výslednou obálku (můžete použít vhodný počítačový program).
2. Uvažujme jednotkovou kružnici se středem v počátku soustavy souřadnic. Z bodového zdroje umístěného v bodě $(0, 1)$ vycházejí paprsky a odrážejí se od kružnice. Najděte obálku odražených paprsků.





Poznámka. Výpočet singulární množiny je pracný, ale vede k jednoduchému výsledku. Budete-li počítat ručně, zkuste všechny členy získané výpočtem determinantu vyjádřit ve tvaru polynomu v proměnné $\sin \lambda$. Pokud chcete, můžete k výpočtu singulární množiny použít vhodný program pro symbolické výpočty (např. Wolfram Mathematica).