Geodetické trojúhelníky

Věta Je-li plocha $f: U \to \mathbb{R}^3$ parametrizována tak, že její 1. základní forma má tvar $\{g_{ij}(u,v)\} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & G(u,v) \end{pmatrix}$, pak křivka $c = f \circ \varphi$, kde $\varphi(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$, je geodetika, právě když platí

$$u''(t) - \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u}(u(t), v(t))\, v'(t)^2 = 0,$$

$$v''(t) + \frac{1}{2}\,\frac{\frac{\partial G}{\partial v}(u(t), v(t))}{G(u(t), v(t))}\, v'(t)^2 + \frac{\frac{\partial G}{\partial u}(u(t), v(t))}{G(u(t), v(t))}\, u'(t)\, v'(t) = 0.$$

Dk $\{b_{ij}\} = \{g_{ij}\}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{G(u,v)} \end{pmatrix}$

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{2} b_{kl}\left(\frac{\partial g_{il}}{\partial u_j} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial u_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_l}\right) = \frac{1}{2} b_{kk}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial u_j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial u_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_k}\right)$$

$k = 1$:

$$\Gamma^1_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{i1}}{\partial u_j} + \frac{\partial g_{j1}}{\partial u_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_1}\right) \quad \dots \quad \{\Gamma^1_{ij}\}_{i,j=1}^{2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u} \end{pmatrix}$$

$k = 2$:

$$\Gamma^2_{ij} = \frac{1}{2G(u,v)}\left(\frac{\partial g_{i2}}{\partial u_j} + \frac{\partial g_{j2}}{\partial u_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_2}\right) \quad \dots \quad \{\Gamma^2_{ij}\}_{i,j=1}^{2} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2G}\frac{\partial G}{\partial u} \\ \frac{1}{2G}\frac{\partial G}{\partial u} & \frac{1}{2G}\frac{\partial G}{\partial v} \end{pmatrix}$$

dif. rovnice pro geodetiky:

$$\forall k \in \{1,2\} \quad \varphi_k''(t) + \sum_{i,j=1}^{2} \Gamma^k_{ij}(\varphi(t))\, \varphi_i'(t)\, \varphi_j'(t) = 0$$

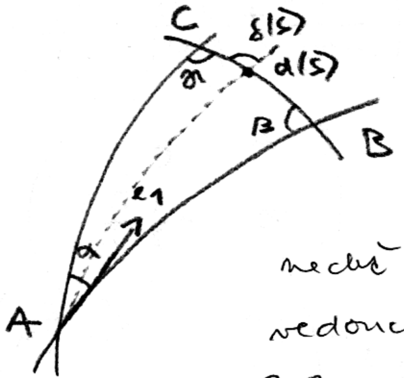
Dosazením $\varphi_1(t) = u(t)$, $\varphi_2(t) = v(t)$ a Γ^k_{ij} získáme požadovaný výsledek. $\square$

Věta (Gauss): nechť A je bod na ploše a V jeho okolí, které je parametrizováno pomocí geodetických polárních souřadnic f^r se středem A. Je-li $\triangle ABC$ trojúhelník ležící uvnitř V, jehož strany jsou geodetiky, pak

$$\iint_{(f^r)^{-1}(\triangle ABC)} K(r,\theta)\sqrt{\det\{g^r_{ij}(r,\theta)\}}\,dr\,d\theta = \alpha+\beta+\gamma-\pi,$$

kde α,β,γ jsou velikosti vnitřních úhlů trojúhelníku.

Dk/ Volme vektor e_1 v def. geodet. polár. souřadnic tak, aby strana AB ležela na radiální geodetice $\theta = 0$. Pak strana AC leží na radiální geodetice $\theta = \alpha$.



Nechť strana BC je parametrizována jako křivka $d = f^r \circ \varphi$, BÚNO obloukem a def. obor d je $[0, l]$, kde l = délka BC.

Nechť $\delta(s)$ = velikost úhlu mezi d a radiální geodetikou vedoucí z A do $d(s)$, $s \in [0,l]$.

Pak $\delta(0) = \pi - \beta$, $\delta(l) = \gamma$ a obecně

$$\cos\delta(s) = d'(s)\cdot\frac{\partial f^r}{\partial r}(\varphi(s))$$
$$= \left(\frac{\partial f^r}{\partial r}(\varphi(s))\varphi_1'(s) + \frac{\partial f^r}{\partial \theta}(\varphi(s))\varphi_2'(s)\right)\cdot\frac{\partial f^r}{\partial r}(\varphi(s)) = \varphi_1'(s)$$

$$\varphi_1''(s) = -\delta'(s)\sin\delta(s)$$

1. dif. rovnice pro geodetiky: $\varphi_1''(s) - \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial r}(\varphi(s))\varphi_2'(s)^2 = 0$

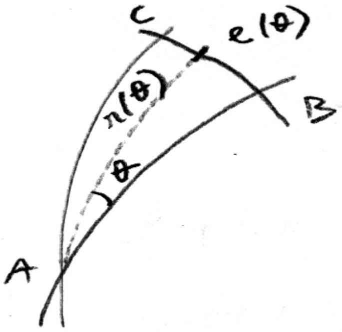
$$\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial r}(\varphi(s))\varphi_2'(s)^2 = -\delta'(s)\sin\delta(s)$$

dvě různá vyjádření obsahu rovnoběžníku $\frac{\partial f^r}{\partial r}(\varphi(s))$, $d'(s)$

$$= -\delta'(s)\left\|\frac{\partial f^r}{\partial r}(\varphi(s))\times d'(s)\right\|$$
$$= -\delta'(s)\left\|\frac{\partial f^r}{\partial r}(\varphi(s))\times\left(\frac{\partial f^r}{\partial r}(\varphi(s))\varphi_1'(s) + \frac{\partial f^r}{\partial \theta}(\varphi(s))\varphi_2'(s)\right)\right\|$$
$$= -\delta'(s)\varphi_2'(s)\sqrt{\det\{g^r_{ij}(\varphi(s))\}}$$
$$= -\delta'(s)\varphi_2'(s)\sqrt{G}(\varphi(s))$$

$$\delta'(s) = -\frac{1}{2}\frac{\frac{\partial G}{\partial r}(\varphi(s))}{\sqrt{G}(\varphi(s))}\varphi_2'(s) = -\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial r}(\varphi(s))\varphi_2'(s)$$

Stranu BC lze parametrizovat také jako křivku $e = f^r \circ \psi$, kde $\psi(\theta) = \binom{r(\theta)}{\theta}$, $\theta \in [0,\alpha]$.



$d = f^r \circ \varphi$ a $e = f^r \circ \psi$ jsou dvě parametrizace téže křivky $\Rightarrow \exists\, \tau : [0,l] \to [0,\alpha]$

$\forall s \in [0,l] \quad d(s) = e(\tau(s))$, tj. $\varphi(s) = \psi(\tau(s))$

(Bod na BC, který má od B vzdálenost s, leží na radiální geodetice $\theta = \tau(s)$.)

$$\varphi'(s) = \psi'(\tau(s))\,\tau'(s) \quad\Rightarrow\quad \varphi_2'(s) = \psi_2'(\tau(s))\,\tau'(s) = \tau'(s)$$

$$\iint\limits_{(f^r)^{-1}(\triangle ABC)} K(r,\theta)\sqrt{\det\{g_{ij}^r(r,\theta)\}}\,dr\,d\theta = \int_0^\alpha\left(\int_0^{r(\theta)} -\frac{\frac{\partial^2\sqrt{G}}{\partial r^2}(r,\theta)}{\sqrt{G}(r,\theta)}\sqrt{G}(r,\theta)\,dr\right)d\theta$$

$$= \int_0^\alpha \left[-\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial r}(r,\theta)\right]_{r=0}^{r(\theta)} d\theta = \int_0^\alpha \left(1 - \frac{\partial\sqrt{G}}{\partial r}(r(\theta),\theta)\right) d\theta =$$

$$= \alpha + \int_0^\alpha -\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial r}(r(\theta),\theta)\,d\theta$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{subst.}\ \theta = \tau(s),\quad s \in [0,l]\\ \qquad d\theta = \tau'(s)\,ds\end{array}}$$

$$= \alpha + \int_0^l -\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial r}\Big(\underbrace{r(\tau(s)),\tau(s)}_{\substack{\psi(\tau(s))\\ =\varphi(s)}}\Big)\underbrace{\tau'(s)}_{\varphi_2'(s)}\,ds$$

$$= \alpha + \int_0^l \delta'(s)\,ds = \alpha + \delta(l) - \delta(0) = \alpha + \gamma - (\pi - \beta) = \alpha + \beta + \gamma - \pi$$

□

Pozn.: 1) věta platí nejen pro f^r, ale pro libovolnou parametrizaci. Integrál nezávisí na volbě parametrizace:

$$f^r = f \circ \varphi, \quad \text{tj.} \quad f^r(r,\theta) = f(\varphi(r,\theta)) \quad \forall r\ \forall\theta$$

$$\frac{\partial f^r}{\partial r}(r,\theta) \times \frac{\partial f^r}{\partial \theta}(r,\theta) = \frac{\partial f}{\partial u}(\varphi(r,\theta)) \times \frac{\partial f}{\partial v}(\varphi(r,\theta))\ J_\varphi(r,\theta)$$

$$\iint\limits_{(f^r)^{-1}(\triangle ABC)} K_{f^r}(r,\theta)\sqrt{\det\{g_{ij}^r(r,\theta)\}}\,dr\,d\theta =$$

$$= \iint\limits_{(f\circ\varphi)^{-1}(\triangle ABC)} K_f(\varphi(r,\theta))\left\|\frac{\partial f^r}{\partial r}(r,\theta) \times \frac{\partial f^r}{\partial \theta}(r,\theta)\right\| dr\,d\theta$$

$$= \iint\limits_{(f\circ\varphi)^{-1}(\triangle ABC)} K_f(\varphi(r,\theta))\left\|\frac{\partial f}{\partial u}(\varphi(r,\theta)) \times \frac{\partial f}{\partial v}(\varphi(r,\theta))\right\| |J_\varphi(r,\theta)|\,dr\,d\theta$$

$$= \iint\limits_{f^{-1}(\triangle ABC)} K_f(u,v)\left\|\frac{\partial f}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial f}{\partial v}(u,v)\right\| du\,dv = \iint\limits_{f^{-1}(\triangle ABC)} K_f(u,v)\sqrt{\det\{g_{ij}(u,v)\}}\,du\,dv$$

2) Existuje zobecnění věty pro trojúhelníky, jejichž strany nemusejí být geodetiky (Gaussova-Bonnetova věta)

Důsledky:

1) Je-li K konstantní, pak $K \cdot S(\Delta ABC) = \alpha + \beta + \gamma - \pi$.

Tj. $K = 0 \Rightarrow \alpha + \beta + \gamma = \pi$,

$K > 0 \Rightarrow \alpha + \beta + \gamma > \pi$,

$K < 0 \Rightarrow \alpha + \beta + \gamma < \pi$.

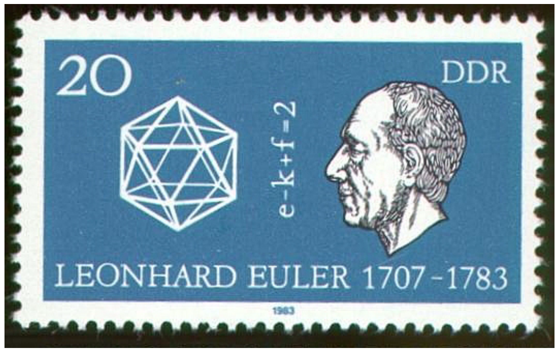
$$K \neq 0 \Rightarrow S(\Delta ABC) = \frac{\alpha + \beta + \gamma - \pi}{K}$$

2) Je-li K_A Gaussova křivost v bodě A, pak

$$K_A = \lim_{B,C \to A} \frac{\iint_{f^{-1}(\Delta ABC)} K(u,v) \sqrt{\det\{g_{ij}(u,v)\}}\, du\, dv}{\iint_{f^{-1}(\Delta ABC)} \sqrt{\det\{g_{ij}(u,v)\}}\, du\, dv} =$$

$$= \lim_{B,C \to A} \frac{\alpha + \beta + \gamma - \pi}{S(\Delta ABC)}$$

Eulerova věta o mnohostěnech



Pro každý konvexní mnohostěn platí:

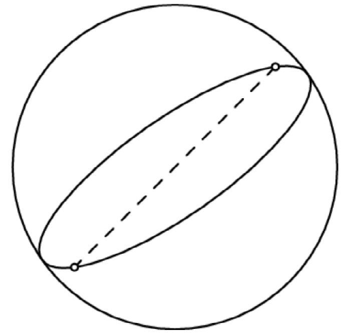
$$\text{počet vrcholů} + \text{počet stěn} = \text{počet hran} + 2$$

Stručná historie Eulerovy věty

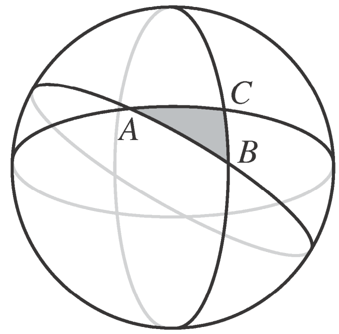
- kolem 1630: Descartesova věta o součtu hranových úhlů v mnohostěnu
- 1750: Euler v dopise Goldbachovi zmiňuje vzorec $H + S = A + 2$, neumí jej dokázat
- 1751: Eulerův kombinatorický induktivní důkaz (odřezávání čtyřstěnů) – nekorektní
- 1794: Legendre publikuje první správný důkaz
- 1813: Cauchy dokazuje Eulerovu větu pro rovinné grafy, věta o mnohostěnech je jednoduchým důsledkem

Hlavní kružnice a sférické mnohoúhelníky

Hlavní kružnice na sféře = kružnice, která je průnikem sféry s rovinou procházející středem sféry

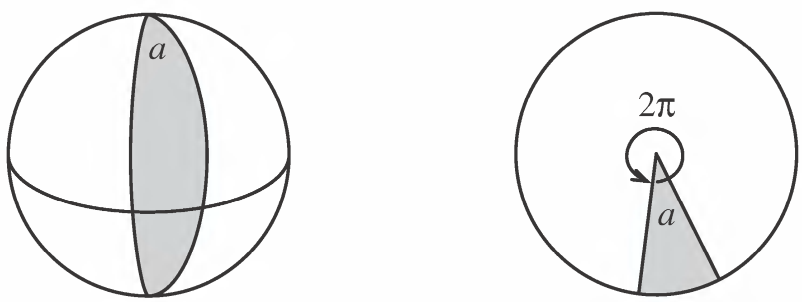


Sférický mnohoúhelník = útvar na sféře ohraničený oblouky hlavních kružnic



Obsah sférického dvojúhelníku

Sférický dvojúhelník = část sféry ohraničená dvěma hlavními polokružnicemi

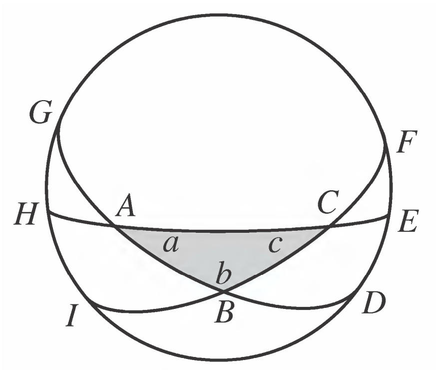


$$\frac{\text{obsah sférického dvojúhelníku}}{\text{obsah sféry}} = \frac{a}{2\pi}$$

Na jednotkové sféře:

$$\text{obsah sférického dvojúhelníku} = 2a$$

Obsah sférického trojúhelníku na jednotkové sféře

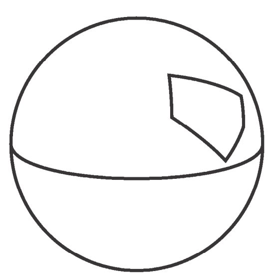


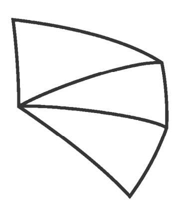
$$S(ADE) + S(AGH) = 2a$$
$$S(BFG) + S(BDI) = 2b$$
$$S(CHI) + S(CEF) = 2c$$
$$S(ADE)+S(AGH)+S(BFG)+S(BDI)+S(CHI)+S(CEF) = 2(a+b+c)$$
$$\text{obsah hemisféry} + 2S(ABC) = 2(a+b+c)$$
$$S(ABC) = a+b+c-\pi$$

Obsah sférického n-úhelníku (1)

Obsah sférického n-úhelníku na jednotkové sféře, jehož vnitřní úhly mají velikosti $a_1, \dots, a_n$, je $a_1 + \cdots + a_n - (n-2)\pi$.

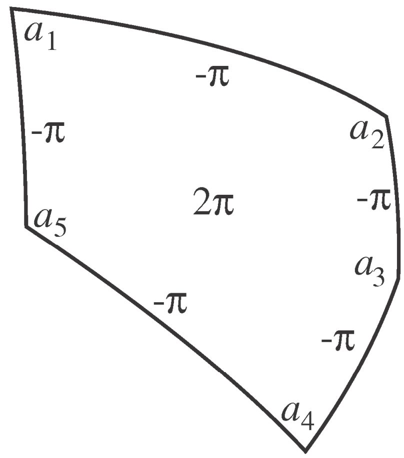
Důkaz rozdělením n-úhelníku na $n-2$ trojúhelníků:





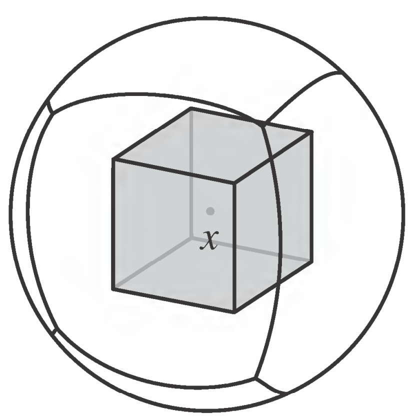
Obsah sférického n-úhelníku (2)

$$S = a_1 + \cdots + a_n - (n-2)\pi$$
$$= a_1 + \cdots + a_n - n\pi + 2\pi$$



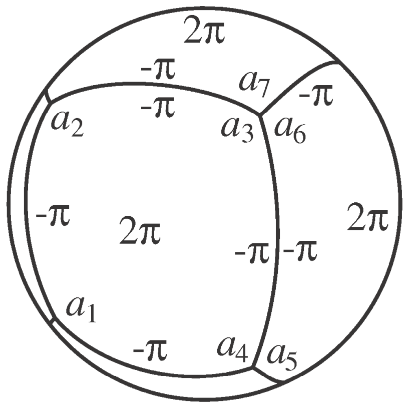
Důkaz Eulerovy věty (1)

- Dán konvexní mnohostěn; předpokládejme, že jej lze umístit do jednotkové sféry tak, aby střed sféry ležel uvnitř mnohostěnu.
- Středové promítání ze středu sféry: hrany přecházejí v oblouky hlavních kružnic, sféra rozdělena na sférické mnohoúhelníky.



Důkaz Eulerovy věty (2)

obsah jednotkové sféry = součet obsahů sférických mnohoúhelníků

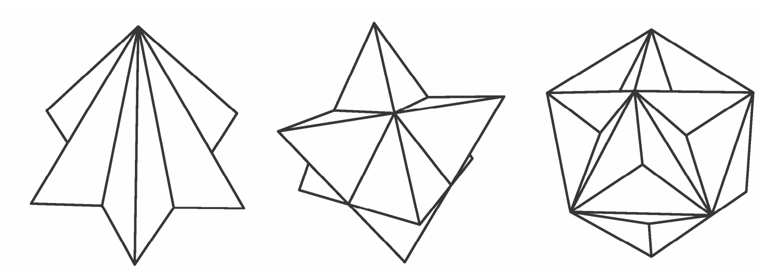


$$4\pi = 2\pi \cdot \text{počet stěn} - \pi \cdot 2 \cdot \text{počet hran} + 2\pi \cdot \text{počet vrcholů}$$

$$2 = \text{počet stěn} - \text{počet hran} + \text{počet vrcholů}$$

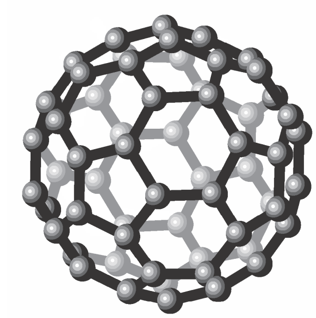
Hvězdicově konvexní mnohostěny

Pozorování (Louis Poinsot, 1809):
Konvexita není nezbytná, Legendreův důkaz funguje i pro hvězdicově konvexní mnohostěny.



Golf, chemie a fotbal

A golf ball composed of 220 hexagons and 12 pentagons.



Pětiúhelníků je vždy dvanáct

- Stěny mnohostěnu jsou pouze pětiúhelníkové nebo šestiúhelníkové.
- Každá hrana je společná pro dvě stěny.
- V každém vrcholu se stýkají tři stěny.

$$P = \text{počet pětiúhelníků}, \qquad H = \text{počet šestiúhelníků}$$

$$\begin{aligned} \text{počet stěn} &= P + H, \\ \text{počet hran} &= \frac{5P + 6H}{2}, \\ \text{počet vrcholů} &= \frac{5P + 6H}{3} \end{aligned}$$

Eulerova věta:

$$P + H + \frac{5P + 6H}{3} = \frac{5P + 6H}{2} + 2 \quad \Rightarrow \quad P = 12$$

Literatura

- David S. Richeson, *Euler's gem. The polyhedron formula and the birth of topology*, Princeton University Press, 2008.
- Jiří Matoušek, Jaroslav Nešetřil, *Kapitoly z diskrétní matematiky*, Karolinum, Praha, 2002.
- Stanislav Horák, *Mnohostěny*, Škola mladých matematiků 27, Mladá fronta, Praha, 1970. `http://dml.cz/handle/10338.dmlcz/403721`
- David Eppstein, *Twenty Proofs of Euler's Formula:* $V - E + F = 2$. `http://www.ics.uci.edu/~eppstein/junkyard/euler/`