PLOCHY S KONSTANTNÍ GAUSSOVOU KŘIVOSTÍ

Dána plocha $f : U \to \mathbb{R}^3$: jak se mění její Gaussova křivost při změně velikosti?

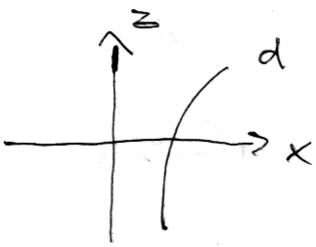
$\tilde{f}(u,v) = \alpha f(u,v)$, kde $\alpha \neq 0$

$\{\tilde{g}_{ij}\} = \alpha^2 \{g_{ij}\}$, $\{\tilde{h}_{ij}\} = \alpha \{h_{ij}\}$

$$\tilde{K} = \frac{\det\{\tilde{h}_{ij}\}}{\det\{\tilde{g}_{ij}\}} = \frac{\alpha^2 \det\{h_{ij}\}}{\alpha^4 \det\{g_{ij}\}} = \frac{1}{\alpha^2} K$$

$\Rightarrow$ při hledání ploch s konstantní křivostí se můžeme omezit na $K=0$, $K=1$, $K=-1$.

Rotační plochy s konstantní Gaussovou křivostí



$$d(s) = \begin{pmatrix} x(s) \\ 0 \\ z(s) \end{pmatrix} \qquad f(u,v) = \begin{pmatrix} x(u)\cos v \\ x(u)\sin v \\ z(u) \end{pmatrix}$$

regularita f: d regulární, $x(u) \neq 0$

BÚNO $\forall u\ x(u) > 0$, d par. obloukem $(x'(s)^2 + z'(s)^2 = 1)$

víme: $K(u,v) = -\dfrac{x''(u)}{x(u)}$

Plocha s konst. křivostí: $K(u,v) = K \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ $x''(u) + K x(u) = 0$, $x'(u)^2 + z'(u)^2 = 1$ … soustava ODR pro x, z

BÚNO $z(0) = 0$ (posunutí d), $z'(0) \geq 0$ (osová souměrnost)

z dalších výpočtů vyplyne, že z' nemění znaménko, tj. $z' \geq 0$

Obecný postup pro dané K:

- vyřešíme $x''(u) + K x(u) = 0$
- vypočteme $x'(u)$, pak $z'(u) = \sqrt{1 - x'(u)^2}$ (musí platit $|x'(u)| \leq 1$)
- $z(s) = \int_0^s \sqrt{1 - x'(u)^2}\, du$

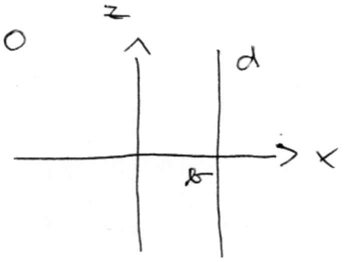
1) $k = 0$

$x''(u) = 0 \quad \Rightarrow \quad x(u) = au + b$

$x'(u) = a$, musí platit $|x'(u)| = |a| \leq 1$

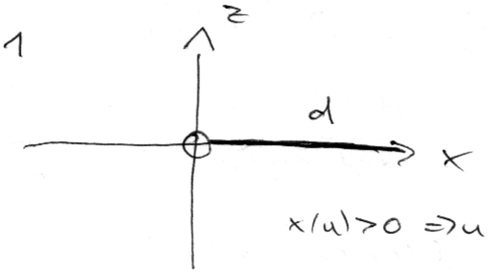
$z'(u) = \sqrt{1-a^2}$, $z(u) = \sqrt{1-a^2}\, u$

i) $a = 0$



d přímka, f válcová plocha

ii) $|a| = 1$

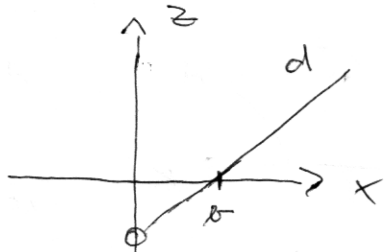


$x(u) > 0 \Rightarrow u > 0$

d polopřímka, f rovina

iii) $0 < |a| < 1$

$$d(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ 0 \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} at+b \\ 0 \\ \sqrt{1-a^2}\, t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ \sqrt{1-a^2} \end{pmatrix}$$



d polopřímka, f kuželová plocha

2) $k = 1$

$x''(u) + x(u) = 0$

$x(u) = a\cos(u+b)$, BÚNO $b = 0$ (jinak změna parametrizace $\tilde{u} = u + b$), BÚNO $a > 0$

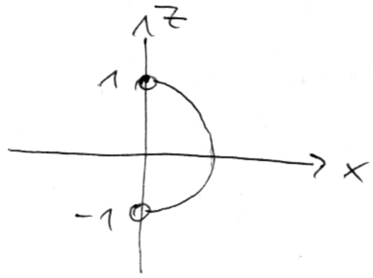
$x(u) = a\cos u$, $x'(u) = -a\sin u$, $z'(u) = \sqrt{1 - a^2 \sin^2 u}$

i) $a = 1$

$z'(u) = \cos u$

$z(u) = \sin u$

$$d(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ 0 \\ \sin t \end{pmatrix}, \quad t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$



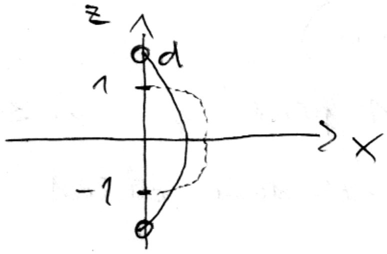
d půlkružnice, f sféra

ii) $0 < a < 1$

$x(t) = a \cos t$

$z(t) = \int_0^t \sqrt{1 - a^2 \sin^2 u}\, du$ ... nelze vyjádřit pomocí elem. funkcí

$t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$



$$\lim_{t \to \frac{\pi}{2}-} z(t) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - a^2 \sin^2 u}\, du$$

$$> \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \sin^2 u}\, du = \left[\sin u\right]_0^{\pi/2} = 1$$

Podobně $\lim_{t \to -\frac{\pi}{2}+} z(t) < -1$

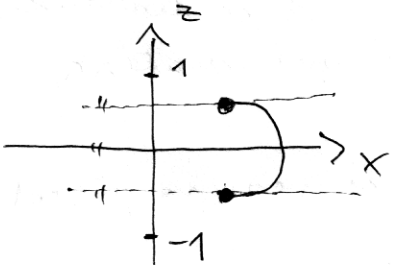
iii) $a > 1$

$|x'(u)| = |a \sin u| \leq 1$ platí pro $u \in [-t^*, t^*]$, kde

$t^* = \arcsin \frac{1}{a} < \frac{\pi}{2}$

$x(t) = a \cos t$

$z(t) = \int_0^t \sqrt{1 - a^2 \sin^2 u}\, du \quad , \quad t \in [-t^*, t^*]$



$x(t^*) = a \cos t^* > 0$

$x(-t^*) = a \cos(-t^*) > 0$

$$z(t^*) = \int_0^{t^*} \sqrt{1 - a^2 \sin^2 u}\, du < \int_0^{t^*} \sqrt{1 - \sin^2 u}\, du$$

$$< \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \sin^2 u}\, du = 1$$

Podobně $z(-t^*) > -1$

$$\left.\begin{aligned} z'(t^*) &= \sqrt{1 - a^2 \sin^2 t^*} = 0 \\ z'(-t^*) &= \sqrt{1 - a^2 \sin^2(-t^*)} = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$ vodorovné tečny v krajních bodech

3) $k = -1$

$x''(u) - x(u) = 0$

$x(u) = a e^{u} + b e^{-u}$

i) $a \neq 0,\ b = 0$

$x(u) = a e^{u} = e^{\ln a + u}$, BÚNO $a = 1$, tj. $\ln a = 0$

(jinak změna parametrizace $\tilde{u} = \ln a + u$)

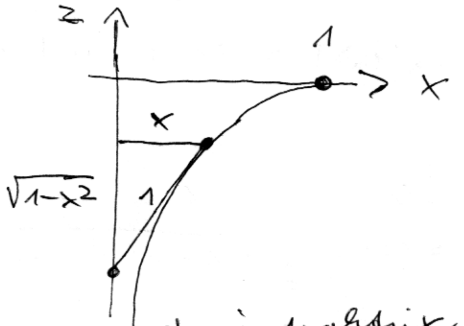
$x(u) = e^{u}$, $x'(u) = e^{u}$, $|x'(u)| \leq 1$ platí pro $u \leq 0$

$z(s) = \int_0^s \sqrt{1 - e^{2u}}\, du$ ... lze zintegrovat, nebudeme dělat

Zkusme vyjádřit d jako graf funkce $z = z(x)$:

$x(s) = e^{s} \Rightarrow s = \ln x \Rightarrow z = \int_0^{\ln x} \sqrt{1 - e^{2u}}\, du$

$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{x}\sqrt{1 - e^{2\ln x}} = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$



d je traktrix, f je pseudosféra

ii) $a = 0,\ b \neq 0$

$x(u) = b e^{-u}$ ... změna parametrizace $\tilde{u} = -u$ vede na případ i)

iii) $a, b \neq 0$, mají stejná znaménka

změna parametrizace $u = \tilde{u} + \alpha$, α určíme později

$x(\tilde{u}) = a e^{\tilde{u} + \alpha} + b e^{-\tilde{u} - \alpha} = a e^{\alpha} e^{\tilde{u}} + b e^{-\alpha} e^{-\tilde{u}}$

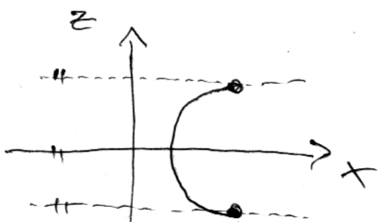
chceme $a e^{\alpha} = b e^{-\alpha}$ ... $e^{2\alpha} = \frac{b}{a}$, $\alpha = \frac{1}{2} \ln \frac{b}{a}$

označme $a e^{\alpha} = b e^{-\alpha} = \frac{c}{2}$:

$x(\tilde{u}) = \frac{c}{2}(e^{\tilde{u}} + e^{-\tilde{u}}) = c \cosh \tilde{u}$, $x'(\tilde{u}) = c \sinh \tilde{u}$

$|x'(\tilde{u})| \leq 1$ platí pro $\tilde{u} \in [-s^*, s^*]$, kde $s^* = \operatorname{arcsinh} \frac{1}{c}$

$$d(s) = \begin{pmatrix} x(s) \\ 0 \\ z(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \cosh s \\ 0 \\ \int_0^s \sqrt{1 - c^2 \sinh^2 u}\, du \end{pmatrix}, \quad s \in [-s^*, s^*]$$



$$\left.\begin{aligned} z'(s^*) &= \sqrt{1 - c^2 \sinh^2 s^*} = 0 \\ z'(-s^*) &= \sqrt{1 - c^2 \sinh^2(-s^*)} = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$ vodorovné tečny v krajních bodech

iv) $a, b \neq 0$, mají opačná znaménka

změna parametrizace $u = \tilde{u} + \alpha$, α určíme později

$$x(\tilde{u}) = a e^{\alpha} e^{\tilde{u}} + b e^{-\alpha} e^{-\tilde{u}}$$

chceme $a e^{\alpha} = -b e^{-\alpha}$ ... $e^{2\alpha} = -\frac{b}{a}$, $\alpha = \frac{1}{2} \ln\left(-\frac{b}{a}\right)$

označme $a e^{\alpha} = -b e^{-\alpha} = \frac{c}{2}$:

$x(\tilde{u}) = \frac{c}{2}\left(e^{\tilde{u}} - e^{-\tilde{u}}\right) = c \sinh \tilde{u}$, uvažujme $c > 0$ ($c < 0$ podobně)

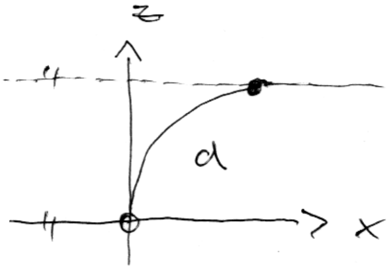
$$x'(\tilde{u}) = c \cosh \tilde{u}$$

$|x'(\tilde{u})| \leq 1$ platí pro $\tilde{u} \in [-s^*, s^*]$, kde $s^* = \operatorname{arccosh} \frac{1}{c}$

$x(\tilde{u}) > 0 \Rightarrow \tilde{u} > 0$ $\quad \tilde{u} \in (0, s^*]$

$$z'(\tilde{u}) = \sqrt{1 - c^2 \cosh^2 \tilde{u}}$$

$$d(s) = \begin{pmatrix} c \sinh s \\ 0 \\ \int_0^s \sqrt{1 - c^2 \cosh^2 u}\, du \end{pmatrix}, \quad s \in (0, s^*]$$



$z'(s^*) = \sqrt{1 - c^2 \cosh^2 s^*} = 0$

$\Rightarrow$ vodorovná tečna v krajním bodě

Diniho plocha

zkroucené rotační plochy:

$$d(s) = \begin{pmatrix} x(s) \\ 0 \\ z(s) \end{pmatrix} \rightsquigarrow f(u, v) = \begin{pmatrix} x(u) \cos v \\ x(u) \sin v \\ z(u) + p v \end{pmatrix}$$

každý bod d rotuje kolem osy z a zároveň se posouvá rovnoběžně se z (jeho trajektorie je šroubovice).

d = traktrix $\rightsquigarrow$ f = Diniho plocha, má konstantní zápornou Gaussovu křivost $K = -\frac{1}{1+p^2}$