ÚHLOVÉ ZOBRAZENÍ A KŘIVOST ROVINNÉ KŘIVKY

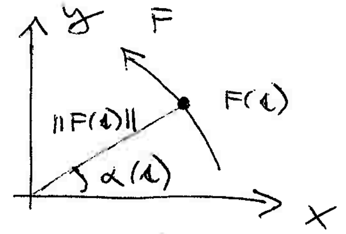
Věta (existence úhlového zobrazení):

nechť $I \subset \mathbb{R}$ je interval, $F: I \to \mathbb{R}^2$ je diferencovatelná a $\forall t \in I$ $\|F(t)\| > 0$. Pak existuje diferencovatelná funkce $\alpha: I \to \mathbb{R}$ („úhlové zobrazení příslušné k F") taková, že $\forall t \in I$ $F(t) = \|F(t)\| \begin{pmatrix} \cos\alpha(t) \\ \sin\alpha(t) \end{pmatrix}$.

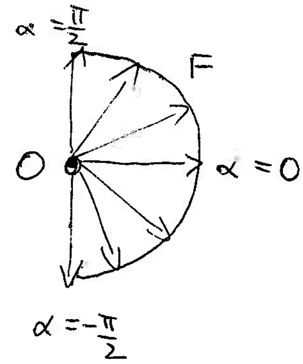
Jsou-li α_1, α_2 dvě takové funkce, pak $\exists k \in \mathbb{Z}$ takové, že $\forall t \in I$ $\alpha_1(t) - \alpha_2(t) = k \cdot 2\pi$.

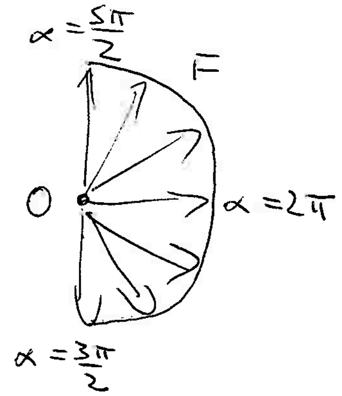
Je-li $F(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$, pak $\alpha'(t) = \dfrac{x(t)y'(t) - x'(t)y(t)}{x(t)^2 + y(t)^2}$.

Pozn.:



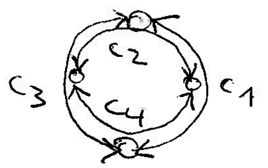
geometrický význam α





α není určena jednoznačně

Dk: Stačí dokázat vzorec pro $\alpha'(t)$, zbytek zřejmý.
Rozdělme jednotkovou kružnici na 4 půlkružnice c_1, c_2, c_3, c_4:



Zvolme pevně $t \in I$.

$\frac{F}{\|F\|}$ spojitá v t $\Rightarrow$ $\exists i \in \{1,2,3,4\}$ $\exists \delta > 0$ $\forall u \in I$ $|u - t| < \delta \Rightarrow \frac{F(u)}{\|F(u)\|} \in c_i$.

Označme $J = (t-\delta, t+\delta) \cap I$; pak $\forall u \in J$ $\frac{F(u)}{\|F(u)\|} \in c_i$.

a) $i = 1$ $\to$ $\forall u \in J$ $x(u) > 0$

$$\begin{pmatrix} x(u) \\ y(u) \end{pmatrix} = F(u) = \|F(u)\| \begin{pmatrix} \cos\alpha(u) \\ \sin\alpha(u) \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha(u) = \frac{y(u)}{x(u)}$$

$\alpha(u) = \operatorname{arctg}\frac{y(u)}{x(u)} + k \cdot 2\pi$ (k nezávisí na u, stejné $\forall u \in J$)

$$\alpha'(t) = \frac{1}{1 + \frac{y(t)^2}{x(t)^2}} \cdot \frac{y'(t)x(t) - y(t)x'(t)}{x(t)^2} = \frac{x(t)y'(t) - x'(t)y(t)}{x(t)^2 + y(t)^2}$$

b) $i=3 \Rightarrow \forall u \in J \quad x(u)<0$

Podobné jako a), ale $\alpha(u) = \operatorname{arctg} \frac{y(u)}{x(u)} + \pi + k \cdot 2\pi$

c) $i=2 \Rightarrow \forall u \in J \quad y(u)>0$

$$\operatorname{cotg} \alpha(u) = \frac{x(u)}{y(u)}$$

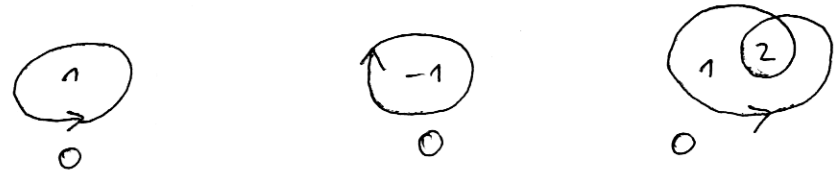
$$\alpha(u) = \operatorname{arccotg} \frac{x(u)}{y(u)} + k \cdot 2\pi$$

$$\alpha'(t) = -\frac{1}{1+\frac{x(t)^2}{y(t)^2}} \frac{x'(t)y(t)-x(t)y'(t)}{y(t)^2} = \frac{x(t)y'(t)-x'(t)y(t)}{x(t)^2+y(t)^2}$$

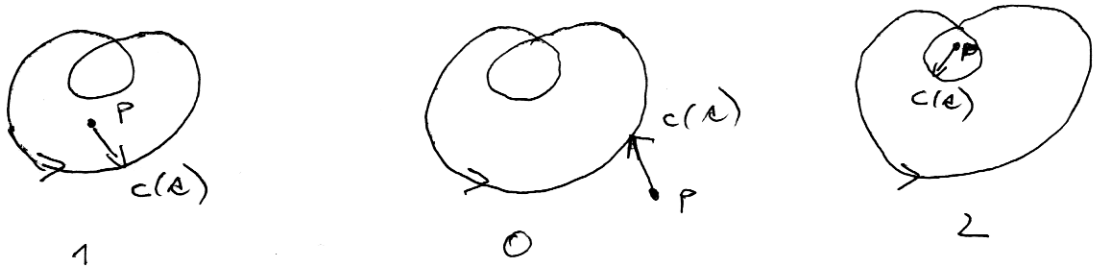
d) $i=4 \Rightarrow \forall u \in J \quad y(u)<0$

Podobné jako c), ale $\alpha(u) = \operatorname{arccotg} \frac{x(u)}{y(u)} + \pi + k \cdot 2\pi$

Úloha: je dána uzavřená křivka $c:[a,b]\to\mathbb{R}^2$ a bod P neležící na c. Chceme určit orientovaný počet oběhů c kolem P.



Ekvivalentní úloha: kolikrát se vektor $c(t)-P$ při probíhání křivky c otočí proti směru hodinových ručiček?



def| Index bodu P vzhledem k uzavřené křivce $c:[a,b]\to\mathbb{R}^2$ neprocházející P je číslo $\dfrac{\alpha(b)-\alpha(a)}{2\pi}$, kde α je úhlové zobrazení příslušné k funkci $F(t)=c(t)-P$.

Věta| (výpočet indexu) Je-li $c(t)=\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\end{pmatrix}$, $t\in[a,b]$, a $P=\begin{pmatrix}p_x\\p_y\end{pmatrix}$, pak index P vzhledem k c je

$$\frac{1}{2\pi}\int_a^b \frac{(x(t)-p_x)\,y'(t)-x'(t)\,(y(t)-p_y)}{(x(t)-p_x)^2+(y(t)-p_y)^2}\,dt.$$

Důk| $F(t)=c(t)-P=\begin{pmatrix}x(t)-p_x\\y(t)-p_y\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \alpha'(t)=\frac{(x(t)-p_x)\,y'(t)-x'(t)\,(y(t)-p_y)}{(x(t)-p_x)^2+(y(t)-p_y)^2}$$

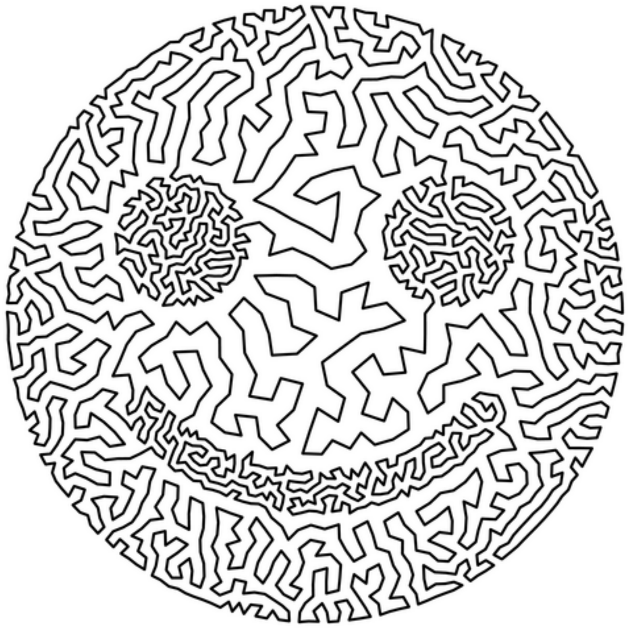
$$\frac{\alpha(b)-\alpha(a)}{2\pi}=\frac{1}{2\pi}\int_a^b \alpha'(t)\,dt$$

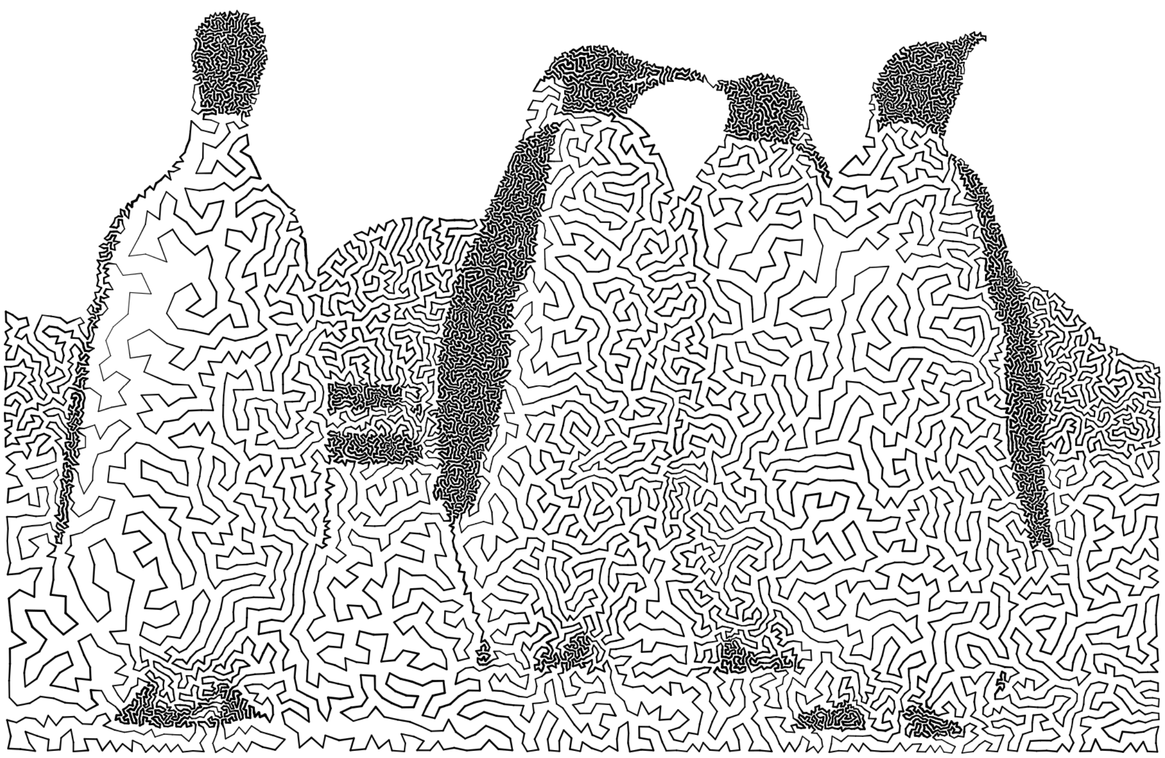
$\square$

Index lze použít k definici vnitřku uzavřené křivky:

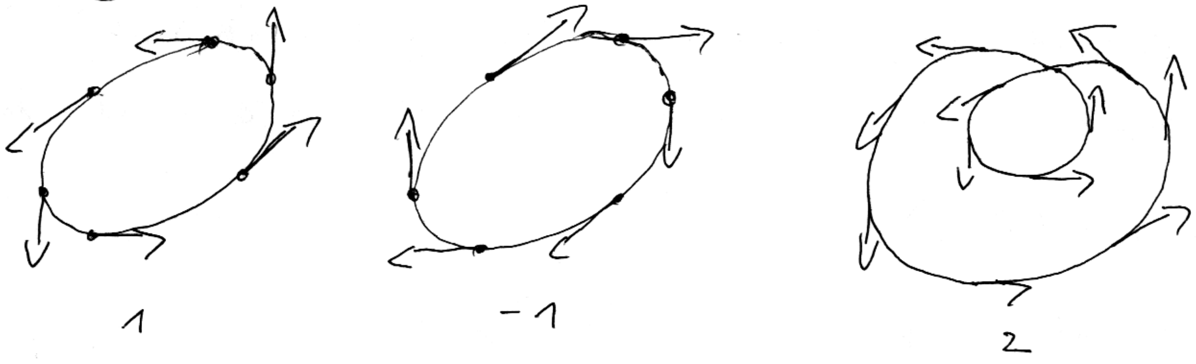
def| Je-li c uzavřená křivka, pak

vnitřek $c=\{P\in\mathbb{R}^2 :$ index P vzhledem k c je nenulový$\}$

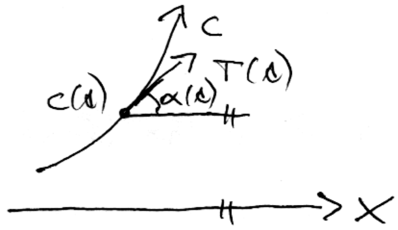




úloha: je dána uzavřená křivka c. Chceme určit orientovaný počet otočení vektoru tečny při proběhnutí křivky.



měříme přírůstek úhlu $\alpha(t)$ mezi vektorem tečny $T(t)$ a rovnoběžkou s osou x.



$$T(t) = \frac{c'(t)}{\|c'(t)\|}$$

$$c'(t) = \|c'(t)\| \begin{pmatrix} \cos\alpha(t) \\ \sin\alpha(t) \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ α je úhlové zobrazení příslušné k c'

__def:__ je-li $c : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ uzavřená regulární křivka splňující $c'(a) = c'(b)$, pak rotační index křivky c je číslo $n_c = \dfrac{\alpha(b) - \alpha(a)}{2\pi}$, kde α je úhlové zobrazení příslušné k funkci $F(t) = c'(t)$.

__věta__ (výpočet rotačního indexu): je-li $c(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$, $t \in [a,b]$, pak

$$n_c = \frac{1}{2\pi} \int_a^b \frac{x'(t)\,y''(t) - x''(t)\,y'(t)}{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt.$$

__Dk:__ $F(t) = c'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \alpha'(t) = \frac{x'(t)\,y''(t) - x''(t)\,y'(t)}{x'(t)^2 + y'(t)^2}$$

$$n_c = \frac{\alpha(b) - \alpha(a)}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \int_a^b \alpha'(t)\, dt \qquad \square$$

__Pozn.:__ je-li c parametrizovaná obloukem, pak

$$\alpha'(s) = \frac{x'(s)\,y''(s) - x''(s)\,y'(s)}{x'(s)^2 + y'(s)^2} = x'(s)\,y''(s) - x''(s)\,y'(s) =$$

$$= \begin{pmatrix} x''(s) \\ y''(s) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -y'(s) \\ x'(s) \end{pmatrix} = T'(s) \cdot N(s) = \kappa(s)$$ (křivost je úhlová rychlost otáčení tečny)

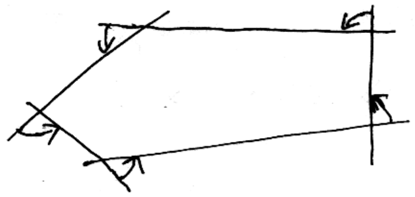
$$\Rightarrow n_c = \frac{1}{2\pi} \int_a^b \kappa(s)\, ds$$

def | uzavřená křivka $c : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ se nazývá jednoduchá, pokud c je prostá na $[a,b)$.

věta (Umlaufsatz, Theorem of turning tangents):
Pro každou uzavřenou jednoduchou křivku c platí $n_c = \pm 1$.

(bez dk., obtížný)

analogie věty pro mnohoúhelníky:



součet velikostí vnějších úhlů jednoduchého mnohoúhelníku je 2π.

Toto tvrzení je ekvivalentní s větou o součtu velikostí vnitřních úhlů.

Dk: α_i ... vnitřní úhly $\Rightarrow$ $\pi - \alpha_i$ ... vnější úhly

- $\sum_{i=1}^{n} (\pi - \alpha_i) = n\pi - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = n\pi - (n-2)\pi = 2\pi$
- $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = - \sum_{i=1}^{n} (\pi - \alpha_i) + n\pi = -2\pi + n\pi = (n-2)\pi$

Ekvivalentní definice křivosti

Připomenu:

1) Taylorův vzorec

Je-li f reálná funkce, která má v bodě x_0 derivace do řádu n, pak

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R(x),$$

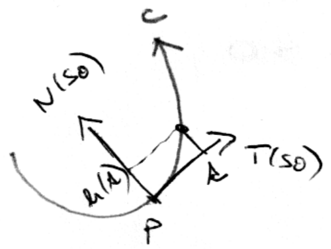
kde $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{R(x)}{(x-x_0)^n} = 0$.

2) Regulární křivku lze v okolí lib. bodu vyjádřit jako graf funkce.

$c: I \to \mathbb{R}^2$ regulární, par. obloukem, $P = c(s_0)$

soust. souřadnic: počátek $P = c(s_0)$, osy ve směru $T(s_0)$, $N(s_0)$

$$c(s) = \begin{pmatrix} x(s) \\ y(s) \end{pmatrix}, \quad s \in I$$



c lze v okolí P vyjádřit jako graf funkce h:

$$\left.\begin{aligned} c(s_0) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ c'(s_0) &= T(s_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ c''(s_0) &= T'(s_0) = \varkappa(s_0) N(s_0) = \varkappa(s_0)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}\right\} (*)$$

$x'(s_0) = 1 \Rightarrow x' > 0$ na okolí s_0, tj. x rostoucí

$(x(s), y(s)) = (t, h(t)) \Rightarrow t = x(s)$, $\quad s = x^{-1}(t)$, $h(t) = y(s) = y(x^{-1}(t))$

$\Rightarrow h = y \circ x^{-1}$

Věta (ekviv. definice křivosti): Ve výše uvedené soustavě souřadnic platí

$$\varkappa(s_0) = \lim_{t\to 0} \frac{2h(t)}{t^2}.$$

Důkaz

$$c(s) = c(s_0) + c'(s_0)(s-s_0) + \frac{c''(s_0)}{2!}(s-s_0)^2 + R(s),$$

kde $\lim\limits_{s\to s_0} \dfrac{R(s)}{(s-s_0)^2} = 0$.

$c(s) = (x(s), y(s))$, $\quad R(s) = (R_x(s), R_y(s))$

$$(*) \Rightarrow \quad x(s) = s - s_0 + R_x(s)$$

$$y(s) = \frac{\varkappa(s_0)}{2}(s-s_0)^2 + R_y(s)$$

$$\varkappa(s_0) = \frac{2(y(s) - R_y(s))}{(s-s_0)^2}$$

$$\varkappa(s_0) = \lim_{s\to s_0} \frac{2(y(s) - R_y(s))}{(s-s_0)^2} = \lim_{s\to s_0} \frac{2y(s)}{(s-s_0)^2} = \lim_{s\to s_0} \frac{2y(s)}{x(s)^2},$$

protože $\lim\limits_{s\to s_0} \dfrac{x(s)}{s-s_0} = 1$

$$\lim_{t\to 0} \frac{2h(t)}{t^2} = \lim_{t\to 0} \frac{2y(x^{-1}(t))}{x(x^{-1}(t))^2} \underset{\uparrow}{=} \lim_{s\to s_0} \frac{2y(s)}{x(s)^2} = \varkappa(s_0)$$

limita slož. fce $\quad s = x^{-1}(t)$

$\lim\limits_{t\to 0} x^{-1}(t) = s_0$

$\square$

Tvrzení (porovnání vzáj. polohy křivky a kružnice)

Nechť $c: I \to \mathbb{R}^2$ má derivace 2. řádu, k kladně orientovaná kružnice o pol. R, k a c se protínají v bodě P a mají zde společný tečný vektor T. Nechť κ je křivost c v bodě P.

1) Pokud $\kappa > \frac{1}{R}$, pak v okolí P leží c na vnitřní straně k.
2) Pokud $\kappa < \frac{1}{R}$, pak v okolí P leží c na vnější straně k.

Dk: soustava souřadnic: počátek P, osy ve směru T, N

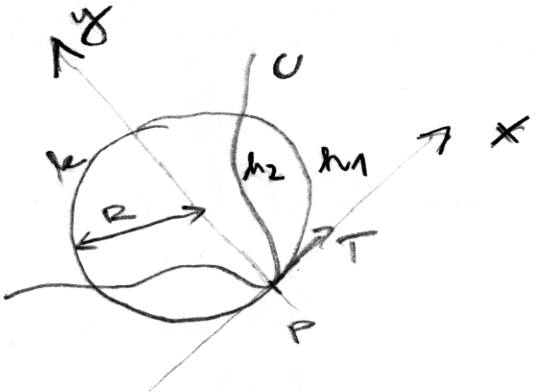
v okolí P: kružnice k = graf fce h_1
křivka c = graf fce h_2

$$\kappa = \lim_{t \to 0} \frac{2h_2(t)}{t^2}, \qquad \frac{1}{R} = \lim_{t \to 0} \frac{2h_1(t)}{t^2}$$

Pokud $\kappa > \frac{1}{R}$, pak $\lim_{t \to 0} \frac{2(h_2(t) - h_1(t))}{t^2} > 0$,

tedy $h_2(t) > h_1(t)$ pro t blízko 0.

Analogicky pro $\kappa < \frac{1}{R}$.



Domácí cvičení (2)

1. Vypočítejte index bodu $(0, 0)$ vzhledem ke křivce $c(t) = \left((1 - 2\sin t)\cos t,\ (1 - 2\sin t)\sin t + \frac{1}{2}\right)$, $t \in [0, 2\pi]$. Výsledek můžete zkontrolovat sestrojením zadané křivky.
2. Najděte příklad uzavřené parametrizované křivky, která má rotační index 0. Ověřte hodnotu rotačního indexu výpočtem.
   Není třeba zdůvodňovat, jak jste ke křivce dospěli. Pokud vás nic nenapadne, hledejte na internetu.

Poznámka. Výpočet integrálů v obou úlohách je pracný, můžete použít vhodný program pro symbolické výpočty (např. Wolfram Mathematica).