VĚTA O ČTYŘECH VRCHOLECH

Věta (existence kružnice opsané kompaktní množině):
nechť $E \subset \mathbb{R}^2$ je kompaktní aspoň dvoubodová množina.
nechť C_E = množina všech kružnic, uvnitř kterých leží E.
Pak existuje právě jedna kružnice $c \in C_E$ s nejmenším poloměrem, nazývá se kružnice opsaná množině E.

Dk) $\forall p \in \mathbb{R}^2 \quad F(p) := \max\limits_{x \in E} \|x-p\|$

E aspoň dvoubodová $\Rightarrow F(p) > 0$

označíme-li $K(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^2 : \|x-y\| \le r\}$,
$\partial K(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^2 : \|x-y\| = r\}$,

pak platí $\forall p \in \mathbb{R}^2 \quad E \subset K(p, F(p))$,
$\partial K(p, F(p)) \in C_E$.

Stačí ukázat, že F nabývá minima v jistém bodě $p_0 \in \mathbb{R}^2$; pak $c = \partial K(p_0, F(p_0))$ je kružnice s nejmenším poloměrem obsahující E.

$$\forall p,q \in \mathbb{R}^2 \ \forall x \in E \quad \|x-q\| \le \|x-p\| + \|p-q\| \le F(p) + \|p-q\|$$
$$\|x-p\| \le \|x-q\| + \|q-p\| \le F(q) + \|p-q\|$$

Přechod k $\max\limits_{x \in E}$:
$$F(q) \le F(p) + \|p-q\|$$
$$F(p) \le F(q) + \|p-q\|$$

$\Rightarrow \forall p,q \in \mathbb{R}^2 \quad |F(p) - F(q)| \le \|p-q\| \Rightarrow F$ je spojitá na $\mathbb{R}^2$

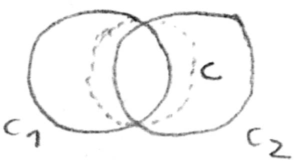
nechť $F(0) = \max\limits_{x \in E} \|x\| = \|x_0\|$ pro jisté $x_0 \in E$. Pak platí

$\forall p \in \mathbb{R}^2 \quad \|p\| \ge 2\|x_0\| \Rightarrow \forall x \in E \quad \|p-x\| \ge \|p\| - \|x\| \ge 2\|x_0\| - \|x_0\|$
$= \|x_0\| = F(0)$

Přechod k $\max\limits_{x \in E}$: $\quad F(p) \ge F(0)$

F nabývá minima na kompaktní množině $K(0, 2\|x_0\|)$ v jistém bodě p_0, je to globální minimum na $\mathbb{R}^2$.
Kdyby existovaly 2 kružnice s nejmenším poloměrem, mohli bychom jejich průnik vepsat do menší kružnice, spor.

$\square$



Věta Nechť $E \subset \mathbb{R}^2$ je kompaktní aspoň dvoubodová množina, c její opsaná kružnice. Pak na každé půlkružnici kružnice c leží aspoň 1 bod z E.

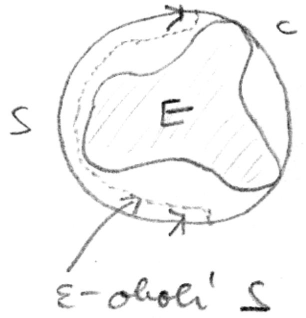
Dk Sporem, nechť s je půlkružnice c neobsahující žádný bod E.

s, E kompaktní $\Rightarrow$ $d := d(s,E) > 0$

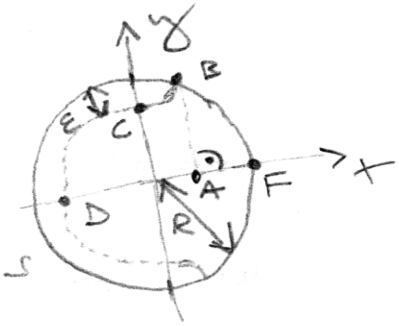
Volíme-li $\varepsilon \in (0,d)$, pak ε-okolí s neobsahuje žádné body E.

BÚNO $\varepsilon < R \Rightarrow$ Hranice ε-okolí je tvořena 3 oblouky kružnic.

Tvrdíme: E lze vepsat do kružnice o menším poloměru, než má c.



Nechť R = poloměr c, volme soustavu souřadnic tak, aby počátek byl ve středu c a všechny body s měly nekladné souřadnice.



Množina E se vejde do kružnice se středem A a poloměrem $r = \max(|AB|, |AC|, |AD|, |AF|)$.

$A = [\delta, 0]$, $\delta < \varepsilon$, $B = [\delta, \sqrt{R^2-\delta^2}]$, $C = [0, R-\varepsilon]$,

$D = [-R+\varepsilon, 0]$, $F = [R, 0]$

$|AF| = R - \delta < R$, $|AB| = \sqrt{R^2-\delta^2} < R$,

$|AD| = \delta + R - \varepsilon < R$

$|AC| = \sqrt{\delta^2 + (R-\varepsilon)^2}$

$|AC|^2 = \delta^2 + R^2 - 2R\varepsilon + \varepsilon^2 < R^2 + 2\varepsilon^2 - 2R\varepsilon = R^2 + \underbrace{2\varepsilon(\varepsilon - R)}_{<0}$

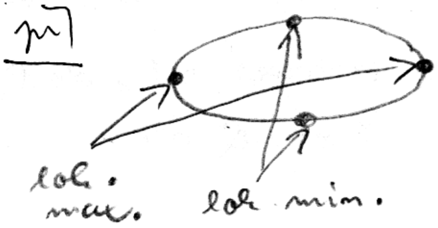
$\Rightarrow |AC| < R$

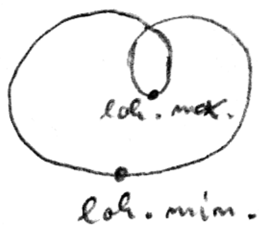
$\Rightarrow r < R$ $\square$

Důsledek $E \cap c$ je aspoň dvoubodová množina. Obsahuje-li právě 2 body, pak jsou to protilehlé body kružnice.

def 1 Vrcholem rovinné křivky je bod, ve kterém její křivost nabývá lokálního extrému.

př





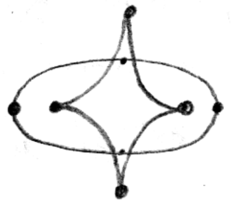
Pozn 1 nechť c je parametrizovaná obloukem a d její evoluta.

$$d'(s) = \left(c(s) + \frac{N(s)}{\kappa(s)}\right)' = T(s) + \frac{N'(s)\kappa(s) - N(s)\kappa'(s)}{\kappa(s)^2} =$$

$$= T(s) + \frac{N'(s)}{\kappa(s)} - N(s)\frac{\kappa'(s)}{\kappa(s)^2} = -N(s)\frac{\kappa'(s)}{\kappa(s)^2}$$

c má vrchol v bodě s $\Rightarrow$ $\kappa'(s) = 0$ $\Rightarrow$ s je singulární bod d

př

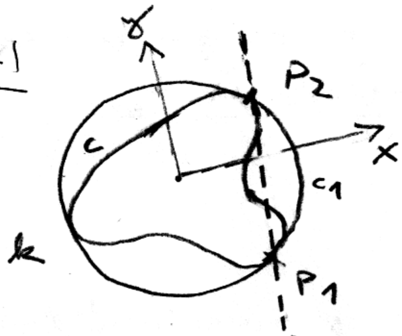


Úmluva: Uzavřenými křivkami budeme dále rozumět křivky $c : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ splňující $c(a) = c(b)$, $c'(a) = c'(b)$, $c''(a) = c''(b)$
$(\Rightarrow \quad T(a) = T(b), \quad \kappa(a) = \kappa(b))$

Každá uzavřená křivka se spojitou křivostí má aspoň 2 vrcholy.
Ukážeme, že každá jednoduchá uzavřená křivka se spojitou křivostí má aspoň 4 vrcholy.

Lemma: Nechť c je jednoduchá uzavřená regulární hladká orientovaná křivka, která má derivace 2. řádu. Nechť k je kružnice opsaná c a R její poloměr. Nechť $P_1, P_2 \in c \cap k$. Jestliže c_1 je část c vedoucí z P_1 do P_2, pak buď c_1 leží na k, nebo existuje bod $Q \in c_1$ splňující $\varkappa(Q) < \frac{1}{R}$.

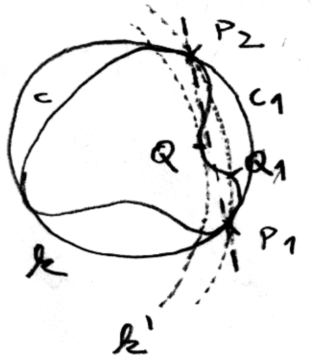
Dk:



BÚNO předpokládejme, že oblouk k z P_1 do P_2 není větší než polovina kružnice (jinak existuje bod $P_3 \in c_1 \cap k$, kterým lze nahradit P_1 nebo P_2)

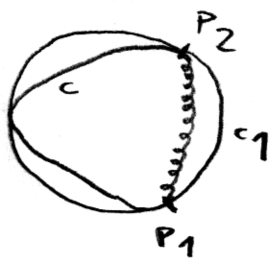
Soustava souřadnic: počátek = střed k, osa y rovnoběžná s $P_1 P_2$, P_1 a P_2 mají nezáporné x-ové souřadnice.

Pokud c_1 neleží na k, pak $\exists$ bod $Q_1 \in c_1$ ležící uvnitř k, který je vpravo od $P_1 P_2$ (tečna k c v P_1 míří vpravo!).



Kružnice procházející P_1, Q_1, P_2 má poloměr $R' > R$.
Nechť k' vznikne posunutím této kružnice co nejdále vlevo tak, aby se stále dotýkala c_1. Nechť $Q \in k' \cap c_1$.
Protože c_1 leží v okolí Q na vnější straně k' (nebo splývá s k'), musí platit
$\varkappa(Q) \leq \frac{1}{R'} < \frac{1}{R}$. $\square$

Pozn: Pro uzavřené křivky, které nejsou jednoduché, lemma neplatí.



Věta (o čtyřech vrcholech): nechť c je jednoduchá uzavřená křivka se spojitou křivostí. Je-li k kružnice opsaná c, pak platí:

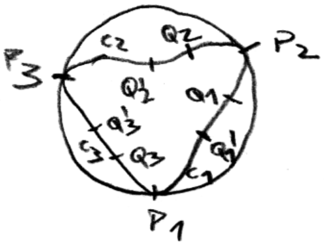
1) $c \cap k$ je aspoň dvoubodová
2) obsahuje-li $c \cap k$ aspoň n bodů, pak c má aspoň $2n$ vrcholů.

Dk: 1) už jsme dokázali

2) nechť $P_1, \dots, P_n \in c \cap k$ jsou uspořádány ve směru kladné orientace.

R = poloměr k

c_i = oblouk c z P_i do P_{i+1} (kde $P_{n+1} := P_1$)



Pokud c_i leží na k, pak 2) platí.

Jinak $\exists\, Q_i \in c_i$ takový, že $\kappa(Q_i) < \frac{1}{R}$.

V bodech $P_1, \dots, P_n$ platí $\kappa \geq \frac{1}{R}$ (křivka je na vnitřní straně kružnice)

κ je spojitá a nabývá minima na oblouku c_i v nějakém vnitřním bodě Q_i'. Tento bod je vrcholem, máme n vrcholů.

Body $Q_1', \dots, Q_n'$ dělí c na oblouky $c_1', \dots, c_n'$. V jejich krajních bodech platí $\kappa < \frac{1}{R}$, ale uvnitř každého c_i' je aspoň 1 bod s $\kappa \geq \frac{1}{R}$ (např. bod P_{i+1}).

κ nabývá maxima na oblouku c_i' v nějakém vnitřním bodě, tento bod je vrcholem. Máme dalších n vrcholů. □

Důsledek: Evoluta jednoduché uzavřené křivky má aspoň 4 singulární body.

Historie:
- 1909 Mukhopadhyaya – dk. pro uzavřené konvexní křivky
- 1912 Kneser – dk. pro jednoduché uzavřené křivky
- náš dk.: Osserman 1985

Obrácení věty (Dahlberg, 1995): Je-li $\kappa : [a,b] \to \mathbb{R}$ konstantní nebo má aspoň 2 lokální minima a 2 lokální maxima, pak existuje jednoduchá uzavřená křivka s křivostí κ.

OBSAHY ROVINNÝCH ÚTVARŮ

Věta Nechť hranice jednoduchého n-úhelníku je při kladné orientaci tvořena body $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$. Položme $x_{n+1} = x_1$, $y_{n+1} = y_1$. Pak obsah n-úhelníku je

$$S = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k+1})(y_k + y_{k+1}) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} (x_k y_{k+1} - x_{k+1} y_k).$$

Dk Stačí dokázat 1. vzorec, protože

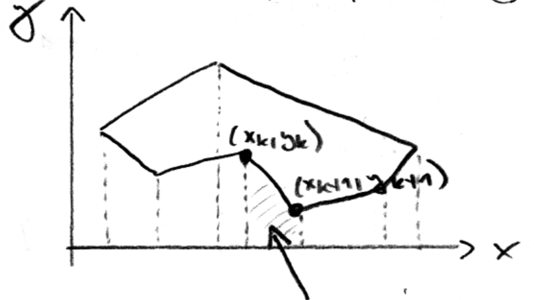
$$\sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k+1})(y_k + y_{k+1}) = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} (x_k y_k - x_{k+1} y_{k+1})}_{=0} + \sum_{k=1}^{n} (x_k y_{k+1} - x_{k+1} y_k)$$

vzorec je invariantní vůči posunutí n-úhelníku o $(\Delta x, \Delta y)$:

- posunutí o $(\Delta x, 0)$ -- zřejmé
- posunutí o $(0, \Delta y)$

$$\sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k+1})(y_k + y_{k+1} + 2\Delta y) = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k+1})(y_k + y_{k+1}) + 2\Delta y \underbrace{\sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k+1})}_{=0}$$

BÚNO předpokládejme, že n-úhelník leží v 1. kvadrantu.



orientovaný obsah lichoběžníku je $(x_k - x_{k+1}) \frac{y_k + y_{k+1}}{2}$

orientace: $\leftarrow$ $+$

$\rightarrow$ $-$

S = součet orientovaných obsahů všech lichoběžníků

$$= \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k+1}) \frac{y_k + y_{k+1}}{2}$$

$\square$

věta| Obsah rovinné oblasti, která je vnitřkem jednoduché uzavřené kladně orientované křivky $c(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$, $t \in [a,b]$,

je $$S = -\int_a^b x'(t)\,y(t)\,dt = \int_a^b x(t)\,y'(t)\,dt = \frac{1}{2}\int_a^b \big(x(t)y'(t) - x'(t)y(t)\big)\,dt.$$

(1) (2) (3)

Dk (náznak):

- (1) je ekvivalentní s (2) (otočení křivky o 90°, resp. integrace per partes)
- (3) je aritmetický průměr (1) a (2)
- aproximace n-úhelníkem:

dělení $D: \ a = t_1 < t_2 < \dots < t_n < t_{n+1} = b$

$c(t_k) = \begin{pmatrix} x(t_k) \\ y(t_k) \end{pmatrix}$

$k \in \{1, \dots, n\}$

obsah n-úhelníku:

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \big(x(t_k) - x(t_{k+1})\big)\big(y(t_k) + y(t_{k+1})\big)$$

$$= -\sum_{k=1}^{n} \underbrace{\frac{x(t_k) - x(t_{k+1})}{t_k - t_{k+1}}}_{\doteq x'(t_k)} \; \underbrace{\frac{y(t_k) + y(t_{k+1})}{2}}_{\doteq y(t_k)} \,(t_{k+1} - t_k)$$

v limitě: $-\int_a^b x'(t)\,y(t)\,dt$ □

Domácí cvičení (3)

1. Uvažujme křivku s parametrizací $c(t) = \left(\cos t,\ \frac{\sin(2\,t)}{2}\right)$, $t \in [-\pi,\ \pi]$. Vypočítejte obsah oblasti ohraničené touto uzavřenou křivkou.