IZOPERIMETRICKÉ ÚLOHY

Úloha: najděte rovinný obrazec předepsaného typu se zadaným obvodem l tak, aby jeho obsah S byl maximální.

iso = stejný, perimetr = obvod

1. Obdélníky

Věta 1) Ze všech obdélníků s obvodem l má největší obsah čtverec.

2) Pro každý obdélník platí $S \leq \frac{l^2}{16}$, rovnost nastává jen pro čtverec.

Dk

$$l = 2a + 2b \Rightarrow b = \frac{l-2a}{2}$$

$$S = ab = \frac{a(l-2a)}{2} = -a^2 + a\frac{l}{2}$$

.. nabývá maxima pro $a = \frac{-\frac{l}{2}}{-1\cdot 2} = \frac{l}{4}$

→ čtverec o straně $\frac{l}{4}$, jeho obsah je $\frac{l^2}{16}$ □

2. Trojúhelníky

Připomeň AG-nerovnost: $\forall a_1, \dots, a_n \in [0, \infty)$

$$\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n},$$ rovnost nastává jen pro $a_1 = \dots = a_n$.

Věta 1) Ze všech trojúhelníků s obvodem l má největší obsah rovnostranný trojúhelník.

2) Pro každý trojúhelník platí $S \leq \frac{l^2}{12\sqrt{3}}$, rovnost nastává jen pro rovnostranný trojúhelník.

Dk

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$ kde $s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{l}{2}$ (Heronův vzorec)

$$S^2 = s(s-a)(s-b)(s-c)$$

AG-nerovnost: $$(s-a)(s-b)(s-c) \leq \left(\frac{s-a+s-b+s-c}{3}\right)^3 = \left(\frac{s}{3}\right)^3$$

$$S^2 \leq \frac{s^4}{3^3} = \frac{l^4}{2^4 3^3}$$

$$S \leq \frac{l^2}{4\cdot 3\cdot\sqrt{3}}$$

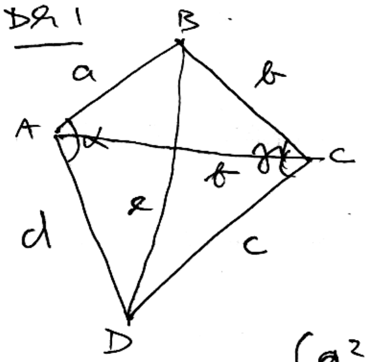
rovnost nastává jen pro $s-a = s-b = s-c$, tj. $a = b = c$ □

3. Čtyřúhelníky

Věta (Bretschneiderův vzorec): Pro konvexní čtyřúhelník platí

$$S = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - abcd\cos^2\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)}, \text{ kde } s = \frac{a+b+c+d}{2}.$$

Důk.:



$$S = \frac{1}{2} ad \sin\alpha + \frac{1}{2} bc \sin\gamma$$

$$4S^2 = a^2d^2\sin^2\alpha + 2abcd\sin\alpha\sin\gamma + b^2c^2\sin^2\gamma$$

kosinová věta:

$$a^2+d^2-2ad\cos\alpha = e^2 = b^2+c^2-2bc\cos\gamma$$

$$(a^2+d^2-b^2-c^2)^2 = 4a^2d^2\cos^2\alpha - 8abcd\cos\alpha\cos\gamma + 4b^2c^2\cos^2\gamma$$

$$16S^2 + (a^2+d^2-b^2-c^2)^2 = 4a^2d^2 - 8abcd\cos(\alpha+\gamma) + 4b^2c^2$$

$$16S^2 = 4(ad+bc)^2 - (a^2+d^2-b^2-c^2)^2 - 8abcd - 8abcd\cos(\alpha+\gamma)$$

$$16S^2 = (2(ad+bc)+a^2+d^2-b^2-c^2)(2(ad+bc)-a^2-d^2+b^2+c^2) - 8abcd(1+\cos(\alpha+\gamma))$$

$$16S^2 = ((a+d)^2-(b-c)^2)((b+c)^2-(a-d)^2) - 8abcd(1+\cos(\alpha+\gamma))$$

$$16S^2 = (a+d+b-c)(a+d-b+c)(b+c+a-d)(b+c-a+d) - 8abcd(1+\cos(\alpha+\gamma))$$

$$16S^2 = (2s-2c)(2s-2b)(2s-2d)(2s-2a) - 8abcd(1+\cos(\alpha+\gamma))$$

$$S^2 = (s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - abcd\cos^2\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right) \qquad \square$$

Pozn.: 1) vzorec platí i pro nekonvexní čtyřúhelníky.
2) Pro tětivové čtyřúhelníky platí $\alpha+\gamma=\pi$, tedy

$$S = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$$ (Brahmaguptův vzorec).

Věta: Pro každý konvexní čtyřúhelník platí $S \le \frac{\ell^2}{16}$, rovnost nastává jen pro čtverec.

Důk.:

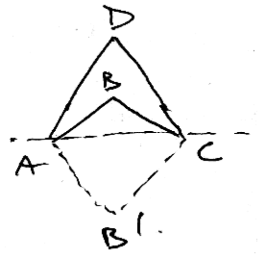
$$S^2 = (s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - abcd\cos\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)$$
$$\le (s-a)(s-b)(s-c)(s-d)$$
$$\le \left(\frac{s-a+s-b+s-c+s-d}{4}\right)^4 = \left(\frac{2s}{4}\right)^4 = \left(\frac{\ell}{4}\right)^4$$

zde nastává rovnost jen pro $\alpha+\gamma=\pi$, tj. tětivový čtyřúhelník

zde nastává rovnost jen pro $a=b=c=d$ ⟹ rovnost jen pro čtverec

$\square$

Pozn.: Předchozí věta platí i pro nekonvexní čtyřúhelníky.



$l(ABCD) = l(AB'CD)$

$S(ABCD) < S(AB'CD) \le \frac{l^2}{16}$

4. Mnohoúhelníky

Věta: $\forall n \in \mathbb{N}, n \ge 3, \forall l > 0$ existuje n-úhelník s obvodem l, jehož obsah je maximální.

Dk: n-úhelník $\leftrightarrow (x_1, y_1, \dots, x_n, y_n) \in \mathbb{R}^{2n}$

$S(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n)$ = obsah n-úhelníku -- spojitá funkce

$L = \{(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n) \in \mathbb{R}^{2n} : \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_{i+1}-x_i)^2 + (y_{i+1}-y_i)^2} = l\}$

zde $x_{n+1} = x_1$, $y_{n+1} = y_1$

je uzavřená podmnožina $\mathbb{R}^{2n}$ (vzor uzavřené množiny $\{l\}$ pro spojitou funkci)

BÚNO stačí uvažovat n-úhelníky ležící v uzavřeném kruhu K se středem v počátku a poloměrem l (posuneme-li n-úhelník tak, aby libovolný vrchol ležel v počátku, pak všechny vrcholy leží v K)

$\forall i \in \{1, \dots, n\} \quad (x_i, y_i) \in K \quad \Rightarrow (x_1, y_1, \dots, x_n, y_n) \in K^n$

$K^n \cap L$ je kompaktní, S zde nabývá maxima. □

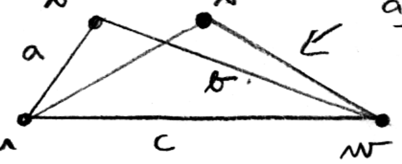
Pozn.: n-úhelník s maximálním obsahem je nutně konvexní (stejná úvaha jako u čtyřúhelníků)

Věta | Ze všech n-úhelníků s obvodem ℓ má maximální obsah pouze pravidelný n-úhelník.

Dk | Sporem, nechť P je konvexní n-úhelník s max. obsahem, který není pravidelný.

a) P nemá všechny strany stejně dlouhé

najdeme 2 sousední strany lišící se délkou, posuneme prostřední vrchol:



$$\frac{a+b+c-c}{2} = s - \frac{c}{2}$$

$T = \triangle uvw$

$T' = \triangle uv'w$ (rovnoramenný, stejný obvod)

$S(T) = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, $\quad S(T') = \sqrt{s \, \frac{c}{2} \cdot \frac{c}{2} \cdot (s-c)}$

$$\begin{aligned} 4S(T)^2 &= s(2s-2a)(2s-2b)(s-c) \\ &= s(c+b-a)(c+a-b)(s-c) = s(c^2-(b-a)^2)(s-c) \\ &< s\,c^2(s-c) = 4\,S(T')^2 \Rightarrow S(T') > S(T), \text{ spor} \end{aligned}$$

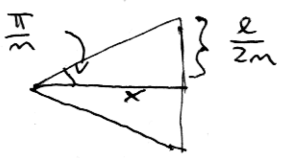
b) P je rovnostranný, ale nemá všechny úhly stejně velké

najdeme 2 nestejné sousední úhly, posuneme prostřední stranu:

$uv'w'x$ je rovnoramenný lichoběžník se stejným obvodem jako $uvwx$ a větším obsahem (plyne z Bretschneiderova vzorce, tětivový čtyřúhelník $\Leftrightarrow$ součty protějších úhlů jsou π) $\square$

Důsledek | Pro každý n-úhelník s obvodem ℓ a obsahem S platí $S \le \frac{\ell^2}{4n} \operatorname{cotg} \frac{\pi}{n}$, rovnost nastává jen pro pravidelný n-úhelník.

Dk | obsah pravidelného n-úhelníku s obvodem ℓ:



$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{n} = \frac{\ell}{2nx} \Rightarrow x = \frac{\ell}{2n \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}}$$

$$S = 2n\left(\frac{1}{2} \frac{\ell}{2n} x\right) = \frac{\ell^2}{4n \operatorname{tg}\frac{\pi}{n}} = \frac{\ell^2}{4n} \operatorname{cotg} \frac{\pi}{n} \qquad \square$$

5. Uzavřené křivky

Která uzavřená křivka délky l má maximální obsah? Křivku lze s libovolnou přesností aproximovat n-úhelníkem, kde n je dostatečně velké. Limitou pravidelných n-úhelníků je kružnice.

Věta) Pro každou jednoduchou uzavřenou křivku délky l, jejíž vnitřek má obsah S, platí $S \leq \frac{l^2}{4\pi}$, přičemž rovnost nastává jen pro kružnici.

Dk) Tvrzení stačí dokázat pro křivky délky 2π, jinak aplikujeme lin. zobrazení $x' = \frac{2\pi}{l} x$, $y' = \frac{2\pi}{l} y$, čímž dostaneme křivku délky $l^* = \frac{2\pi}{l} \cdot l = 2\pi$ s obsahem $S^* = \left(\frac{2\pi}{l}\right)^2 S$. Z tvrzení pro křivky délky 2π pak plyne

$$\left(\frac{2\pi}{l}\right)^2 S = S^* \leq \frac{(l^*)^2}{4\pi} = \frac{(2\pi)^2}{4\pi} \quad \Rightarrow \quad S \leq \frac{l^2}{4\pi}$$

BÚNO $c : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ par. obloukem, kladně orientovaná,

$$c(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

volíme soustavu souřadnic tak, aby $c(0)$ a $c(\pi)$ ležely na ose x, tj. $y(0) = y(\pi) = 0$

$$S = -\int_0^{2\pi} x'(t)\, y(t)\, dt, \quad \text{chceme } S \leq \pi$$

$$S = \underbrace{-\int_0^{\pi} x'(t)\, y(t)\, dt}_{S_1} \underbrace{-\int_{\pi}^{2\pi} x'(t)\, y(t)\, dt}_{S_2}$$

Dokážeme $S_1 \leq \frac{\pi}{2}$, rovnost jen když $c|_{[0,\pi]}$ je půlkružnice; pro S_2 je postup analogický.

substituce: $y(t) = u(t) \sin t$, $t \in [0, \pi]$

(pro $t \in (0, \pi)$ $u(t) = \frac{y(t)}{\sin t}$, v kraj. bodech dodefinujeme limitami, existují dle l'Hospitala)

$$y'(t) = u'(t) \sin t + u(t) \cos t$$

$$S_1 = \int_0^\pi -x'(t)\,y(t)\,dt \overset{\text{AG nerovnost}}{\le} \frac{1}{2}\int_0^\pi \left[x'(t)^2 + y(t)^2\right] dt$$

$$\overset{\text{par. obloukem}}{=} \frac{1}{2}\int_0^\pi \left[1 - y'(t)^2 + y(t)^2\right] dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\pi \left[1 - (u'(t)\sin t + u(t)\cos t)^2 + u^2(t)\sin^2 t\right] dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\pi \left[u(t)^2(\sin^2 t - \cos^2 t) - u'(t)^2\sin^2 t - 2u(t)u'(t)\sin t\cos t + 1\right] dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\pi u(t)^2(\sin^2 t - \cos^2 t)\,dt - \frac{1}{2}\int_0^\pi u'(t)^2 \sin^2 t\,dt -$$

$$- \frac{1}{2}\int_0^\pi \underset{\uparrow}{(u(t)^2)'}\, \underset{\downarrow}{\sin t\cos t}\,dt + \frac{\pi}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\pi u(t)^2(\sin^2 t - \cos^2 t)\,dt - \frac{1}{2}\int_0^\pi u'(t)^2\sin^2 t\,dt -$$

$$- \frac{1}{2}\underbrace{\left[u(t)^2\sin t\cos t\right]_0^\pi}_{=0} + \frac{1}{2}\int_0^\pi u(t)^2(-\sin^2 t + \cos^2 t)\,dt + \frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\int_0^\pi u'(t)^2\sin^2 t\,dt \le \frac{\pi}{2}$$

Rovnosti v nerovnostech nastávají, právě když:

$x'(t)^2 = y(t)^2$

$u'(t) = 0$ na $[0,\pi]$, tj. $u(t) = a$

$\Rightarrow \quad y(t) = a\sin t, \quad y'(t) = a\cos t$

$x'(t)^2 = y(t)^2 = a^2\sin^2 t \qquad x'(t)^2 + y'(t)^2 = a^2$

par. obl. $\Rightarrow \quad a = \pm 1$

$y(t) = \pm\sin t$

$x'(t) = \mp\sin t \qquad \Rightarrow x(t) = \pm\cos t + b$ } půlkružnice

$\square$

Důsledek:
- Ze všech uzavřených křivek délky ℓ má největší obsah kružnice.
- Ze všech uzavřených křivek s obsahem S má kružnice nejkratší obvod $\quad (\ell \ge \sqrt{4\pi S})$

Pozn.: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ell^2}{4n}\operatorname{cotg}\frac{\pi}{n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ell^2}{4n}\frac{\cos\frac{\pi}{n}}{\sin\frac{\pi}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty}\underbrace{\frac{\frac{\pi}{n}}{\sin\frac{\pi}{n}}}_{\to 1}\underbrace{\cos\frac{\pi}{n}}_{\to 1}\frac{\ell^2}{4\pi} = \frac{\ell^2}{4\pi}$

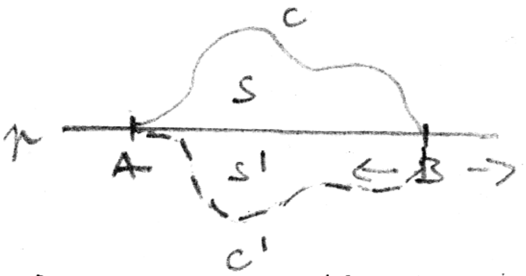
Tj. izoperimetrická nerovnost pro křivky je limitou nerovnosti pro n-úhelníky, kde $n\to\infty$.

Pozn. 1

- Skutečnost, že kružnice má při daném obvodu největší obsah, byla známa už ve starověkém Řecku.
- První pokusy o důkaz pocházejí od J. Steinera (kolem 1838), ale nedokázal existenci křivky s max. obsahem
- První korektní důkaz: A. Hurwitz (1902), Fourierovy řady; náš důkaz: P. Lax (1995)
- 3D verze: $V^2 \le \frac{S^3}{36\pi}$, přičemž rovnost nastává jen pro sféru
- n-rozměrná verze: $V^{n-1} \le \frac{S^n}{2\pi^{n/2} n^{n-1}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)$, rovnost nastává jen pro n-rozměrnou sféru

Legenda (Vergilius): Uprchlá fénická královna Dido se vylodila na severoafrickém pobřeží. Náčelník jí dovolil koupit tolik půdy, kolik je schopna ohraničit jednou volskou kůží. Dido rozstříhala kůži na proužky a svázala v dlouhý pás. Ten natáhla ve tvaru půlkružnice, další část hranice pozemku tvořilo mořské pobřeží.

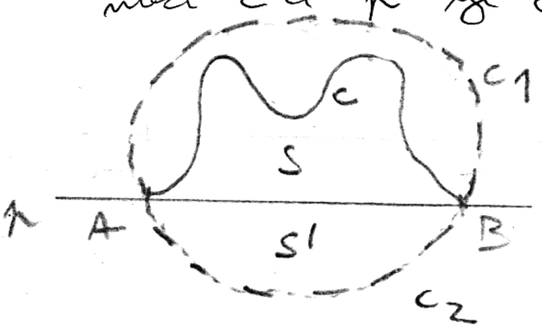
Př) Je dána přímka p a bod $A \in p$. Najděte křivku c délky l spojující A s libovolným bodem $B \in p$ tak, aby plocha ohraničená křivkou a přímkou byla co největší.



c' = symetrická křivka

S maximální $\Leftrightarrow$ $S+S'$ maximální $\Leftrightarrow$ $c+c'$ je kružnice $\Leftrightarrow$ c je půlkružnice

Př) Je dána přímka p, body $A, B \in p$ a číslo $l > |AB|$. Najděte křivku c délky l spojující A, B tak, aby obsah oblasti mezi c a p byl co největší.



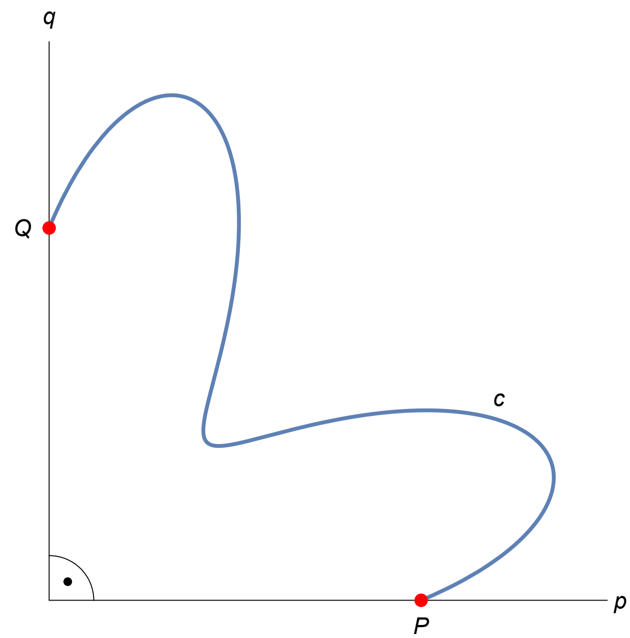
c_1 = oblouk kružnice o délce l spojující A, B

c_2 = doplňkový oblouk

S maximální $\Leftrightarrow$ $S+S'$ maximální $\Leftrightarrow$ $c+c_2$ je kružnice $\Leftrightarrow$ $c=c_1$

Domácí cvičení (4)

1. Jsou dány dvě kolmé polopřímky p, q se společným počátečním bodem a číslo $l > 0$. Najděte nejvýhodnější polohu bodů $p \in P$, $q \in Q$ a křivku c délky l ležící uvnitř pravého úhlu tak, aby obsah oblasti ohraničené křivkou a oběma polopřímkami byl co největší.



2. Vyřešte obecnější variantu předchozí úlohy, kde polopřímky p, q na sebe nemusejí být kolmé, ale svírají úhel $\frac{360^\circ}{2n}$, kde $n \geq 2$ je přirozené číslo.

Poznámka. V obou úlohách zdůvodněte, proč je vaše řešení optimální. (Lze postupovat podobně jako v úloze královny Dido z přednášky, tj. převést problém na izoperimetrickou úlohu pro uzavřené křivky.)