

OBSAHY PLOCHY

$f: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ pov. plocha $\Rightarrow$ obsah plochy je

$$\iint_U \left\| \frac{\partial f}{\partial u} \times \frac{\partial f}{\partial v} \right\| du dv = \iint_U \sqrt{\det \{g_{ij}\}} du dv$$

↑
vert. identita: $\|a_1 \times a_2\| = \sqrt{\det \{a_i \cdot a_j\}_{i,j=1}^2}$

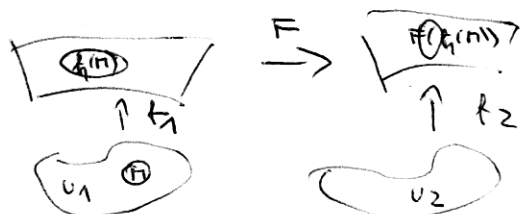
m) sféra o poloměru r

$$f(u, v) = \begin{pmatrix} r \cos u \cos v \\ r \cos u \sin v \\ r \sin u \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} u \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ v \in [-\pi, \pi] \end{matrix}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial u} &= \begin{pmatrix} -r \sin u \cos v \\ -r \sin u \sin v \\ r \cos u \end{pmatrix} \\ \frac{\partial f}{\partial v} &= \begin{pmatrix} -r \cos u \sin v \\ r \cos u \cos v \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \{g_{ij}\} = \begin{pmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & r^2 \cos^2 u \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} S &= \iint_{[-\pi/2, \pi/2] \times [-\pi, \pi]} \sqrt{\det \{g_{ij}\}} du dv = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\int_{-\pi}^{\pi} r^2 \cos u dv \right) du \\ &= 2\pi r^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos u du = \underline{4\pi r^2} \end{aligned}$$

def 1 zobrazení mezi plochami & reálnou plochou, pokud zachováva obsah útruhl, tj. $\forall \pi \subseteq U_1$ obsah $f_1(\pi) =$ obsah $F(f_1(\pi))$.



věta 1 nechť $U_1 \subseteq \mathbb{R}^2$ je otevřená, $\{g_{ij}^1\} = 1$ zjedl. forma f_1 , $\{g_{ij}^2\} = 1$ zjedl. forma $F \circ f_1$. Pak F je plochová $\Leftrightarrow \Leftrightarrow \forall (u, v) \in U_1$ det $\{g_{ij}^1(u, v)\} = \det \{g_{ij}^2(u, v)\}$.

$$\begin{aligned} \text{Def 1} \Leftrightarrow \pi \subseteq U_1 \dots \text{obsah } f_1(\pi) &= \iint_{\pi} \sqrt{\det \{g_{ij}^1(u, v)\}} du dv = \\ &= \iint_{\pi} \sqrt{\det \{g_{ij}^2(u, v)\}} du dv = \text{obsah } F(f_1(\pi)) \end{aligned}$$

$\Rightarrow F$ plochová, $(u_0, v_0) \in U_1$
 $\forall \pi \subseteq U_1$ obsahující (u_0, v_0) platí

$$\text{obsah } f_1(\pi) = \iint_{\pi} \sqrt{\det \{g_{ij}^1\}} du dv = \iint_{\pi} \sqrt{\det \{g_{ij}^2\}} du dv = \text{obsah } F(f_1(\pi))$$

$$\text{tedy } \iint_{\pi} (\sqrt{\dots} - \sqrt{\dots}) du dv = 0$$

$$\Leftrightarrow \text{je spojitá fce, } \forall \pi \text{ obsahující } (u_0, v_0) \quad \iint_{\pi} h du dv = 0 \Rightarrow h(u_0, v_0) = 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{\det \{g_{ij}^1(u_0, v_0)\}} - \sqrt{\det \{g_{ij}^2(u_0, v_0)\}} = 0$$

$$\det \{g_{ij}^1(u_0, v_0)\} = \det \{g_{ij}^2(u_0, v_0)\}$$

Pozn]

- každá izometrie je plochajímé zobrazení.
- Ne každé plochajímé zobrazení je izometrie.
např. $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $F(x, y) = \begin{pmatrix} \lambda x \\ y/\lambda \end{pmatrix}$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$
- zobrazení je izometrie $\Leftrightarrow$ je plochajímé a konformní.

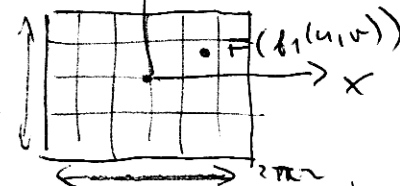
pr] Lambertovo zobrazení (Johann Heinrich Lambert, 1772)

= zobrazení sféry $f_1(u, v) = \begin{pmatrix} r \cos u \cos v \\ r \cos u \sin v \\ r \sin u \end{pmatrix}$, $u \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $v \in (-\pi, \pi)$,

do rovinného obdelníku $f_2(u, v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ 0 \end{pmatrix}$, $u \in (-\pi/2, \pi/2)$, $v \in (-\pi, \pi)$.



$\xrightarrow{F}$
dílka
vlnění
zadostava



$(2\pi)(2\pi) = 4\pi^2$
... celá zadostava

$F(f_1(u, v)) = \begin{pmatrix} r v \\ h(u) \end{pmatrix}$, kde h je zatím neznámá funkce, kterou musíme určit následujícími podmínkami:

- 1) $h(0) = 0$,
- 2) h je rostoucí,
- 3) F je plochajímé.

$\{g_{ij}^2(u, v)\} = \begin{pmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & r^2 \cos^2 u \end{pmatrix}$

$\frac{\partial F \circ f_1}{\partial u} = \begin{pmatrix} 0 \\ h'(u) \end{pmatrix}$

$\frac{\partial F \circ f_1}{\partial v} = \begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \{g_{ij}^3(u, v)\} = \begin{pmatrix} h'(u)^2 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}$

F plochajímé $\Leftrightarrow$

$r^4 \cos^2 u = r^2 h'(u)^2$

$r^2 \cos^2 u = h'(u)^2$

$r \cos u = h'(u)$

$h(u) = r \sin u + C$

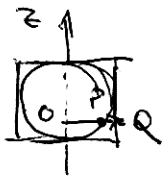
$h(0) = 0$

$C = 0$

$h(u) = r \sin u$

$\Rightarrow$ z-osa souhlasí se přímkou nese

Geom. interpretace: Sféra opisane válec o stej. poloměru a stejné výšce, osa válce je osa z.



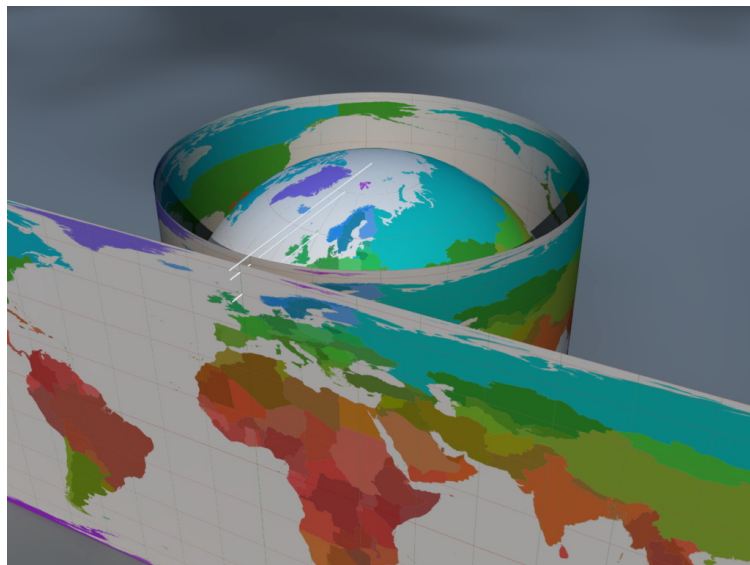
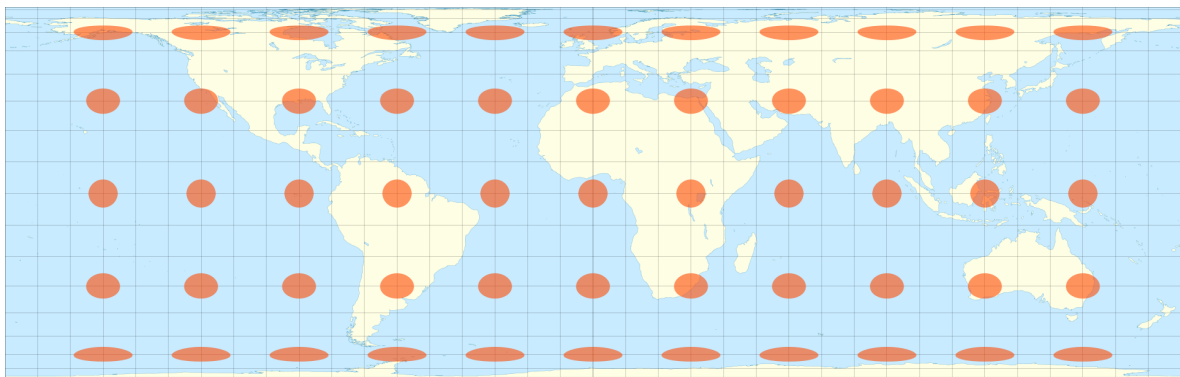
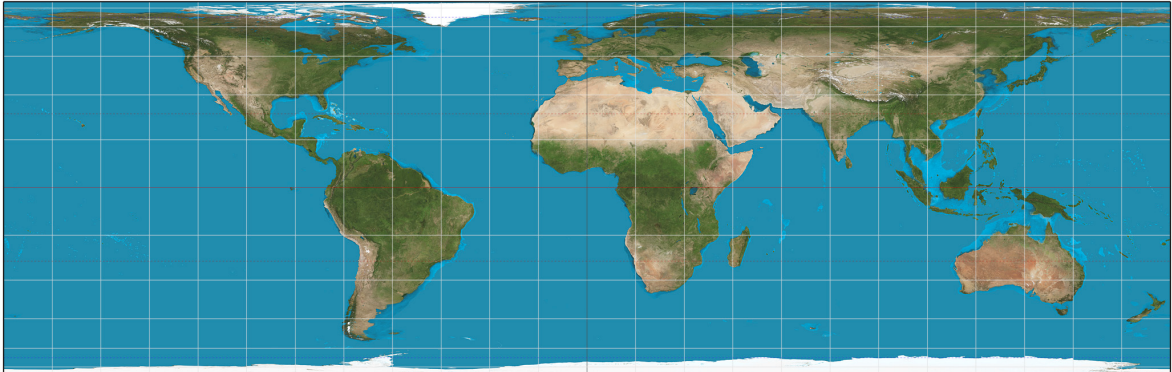
ovšem bod P na sféře je bod Q na válci,

kde O = nejblížejší bod k P na ose z,

Q = průsečík $\vec{OP}$ s válc. plochou

válec utváříme do rovnice.

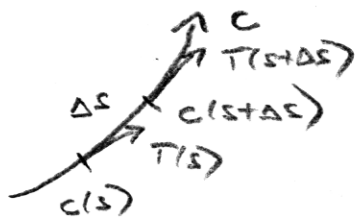
Lambertova projekce



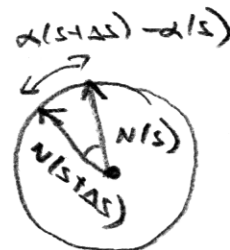
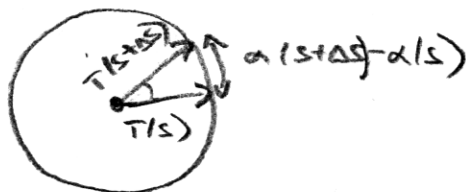
Geometrický význam Gaussovy křivosti

motivace - křivost křivky parametrizované obloukem:

$$\alpha(s) = \alpha'(s), \text{ kde } T(s) = \begin{pmatrix} \cos \alpha(s) \\ \sin \alpha(s) \end{pmatrix}$$

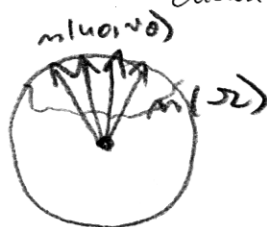
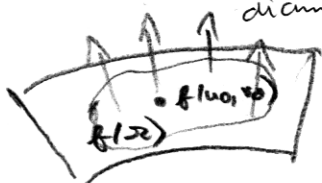


$$\alpha(s) = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\alpha(s+\Delta s) - \alpha(s)}{\Delta s}$$



Věta: Je-li $f: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ regulární plocha a $(u_0, v_0) \in U$, pak

$$|K(u_0, v_0)| = \lim_{\substack{(u_0, v_0) \in \mathcal{R} \subset U \\ \text{diam } \mathcal{R} \rightarrow 0}} \frac{\text{obsah } m(\mathcal{R})}{\text{obsah } f(\mathcal{R})} = \lim_{\substack{(u_0, v_0) \in \mathcal{R} \subset U \\ \text{diam } \mathcal{R} \rightarrow 0}} \frac{\int_{\mathcal{R}} \left\| \frac{\partial m}{\partial u} \times \frac{\partial m}{\partial v} \right\|}{\int_{\mathcal{R}} \left\| \frac{\partial f}{\partial u} \times \frac{\partial f}{\partial v} \right\|}$$



Dk1 $\frac{\partial m}{\partial u} = a_{11} \frac{\partial f}{\partial u} + a_{12} \frac{\partial f}{\partial v}$, $\frac{\partial m}{\partial v} = a_{21} \frac{\partial f}{\partial u} + a_{22} \frac{\partial f}{\partial v}$, (Weingartenovy rovnice)

kde $\{a_{ij}\}_{i,j=1}^2 = -\{h_{ij}\}_{i,j=1}^2 (\{g_{ij}\}_{i,j=1}^2)^{-1}$

$$\frac{\partial m}{\partial u} \times \frac{\partial m}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial u} \times \frac{\partial f}{\partial v} (a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}) = \frac{\partial f}{\partial u} \times \frac{\partial f}{\partial v} \det \{a_{ij}\}$$

$$= - \frac{\partial f}{\partial u} \times \frac{\partial f}{\partial v} \det \{h_{ij}\} \det (\{g_{ij}\}^{-1}) = - \frac{\partial f}{\partial u} \times \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\det \{h_{ij}\}}{\det \{g_{ij}\}} = - \frac{\partial f}{\partial u} \times \frac{\partial f}{\partial v} K$$

$$\left\| \frac{\partial m}{\partial u} \times \frac{\partial m}{\partial v} \right\| = |K| \left\| \frac{\partial f}{\partial u} \times \frac{\partial f}{\partial v} \right\|$$

$$\varepsilon > 0 \rightarrow \exists \delta > 0 \quad \forall \mathcal{R} \subset U, (u_0, v_0) \in \mathcal{R}, \text{diam } \mathcal{R} < \delta$$

$$\forall (u, v) \in \mathcal{R} \quad |K(u, v) - K(u_0, v_0)| < \varepsilon$$

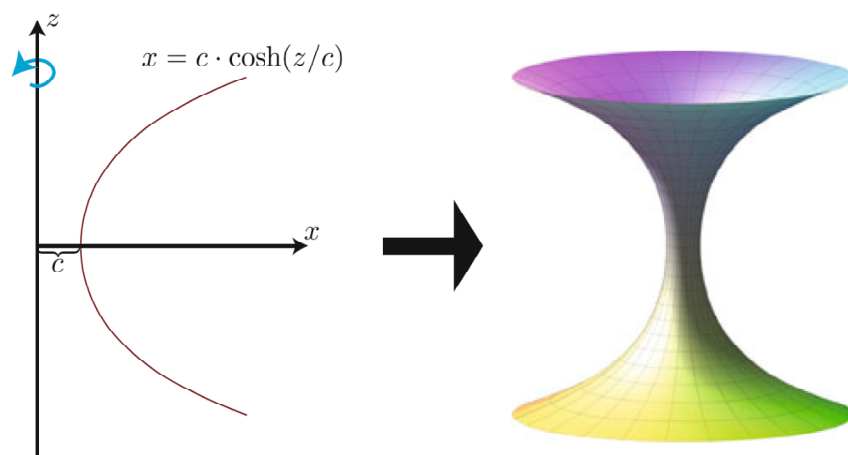
$$\left| \frac{\int_{\mathcal{R}} \left\| \frac{\partial m}{\partial u} \times \frac{\partial m}{\partial v} \right\|}{\int_{\mathcal{R}} \left\| \frac{\partial f}{\partial u} \times \frac{\partial f}{\partial v} \right\|} - |K(u_0, v_0)| \right| = \left| \frac{\int_{\mathcal{R}} |K(u, v)| \left\| \frac{\partial f}{\partial u} \times \frac{\partial f}{\partial v} \right\|}{\int_{\mathcal{R}} \left\| \frac{\partial f}{\partial u} \times \frac{\partial f}{\partial v} \right\|} - |K(u_0, v_0)| \right| \frac{\int_{\mathcal{R}} \left\| \frac{\partial f}{\partial u} \times \frac{\partial f}{\partial v} \right\|}{\int_{\mathcal{R}} \left\| \frac{\partial f}{\partial u} \times \frac{\partial f}{\partial v} \right\|}$$

$$\leq \frac{\int_{\mathcal{R}} |K(u, v) - K(u_0, v_0)| \left\| \frac{\partial f}{\partial u} \times \frac{\partial f}{\partial v} \right\|}{\int_{\mathcal{R}} \left\| \frac{\partial f}{\partial u} \times \frac{\partial f}{\partial v} \right\|} < \varepsilon$$

□

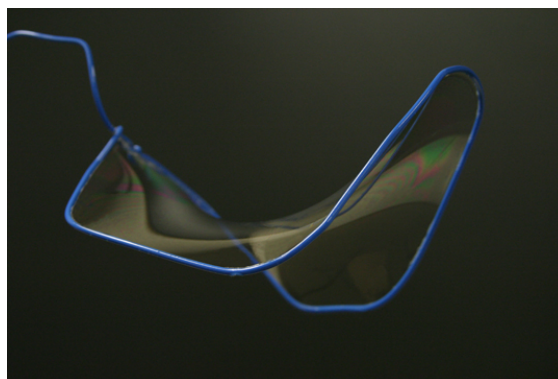
Minimální plochy

1744 Euler řeší následující úlohu: Jsou dány dva body v rovině xz , spojíme je křivkou a rotujeme ji kolem osy z . Pro jakou křivku bude obsah rotační plochy minimální? Optimálním řešením je řetězovka, její rotací vzniká katenoid.



1760 Lagrange: Hledání plochy s předepsanou hranicí, která má minimální obsah. Nutná podmínka pro minimalizaci obsahu je $H = 0$.

19. století Joseph Plateau (belgický fyzik): Minimální plochu lze najít ponořením drátěného rámečku do mýdlového roztoku, povrchové napětí se snaží minimalizovat plochu (Plateauův problém).



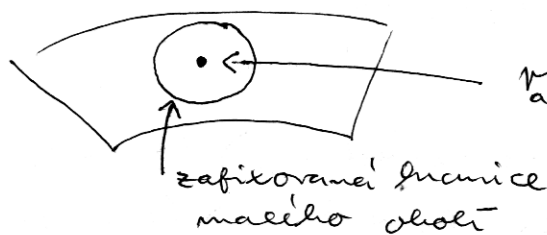
1930 J. Douglas, T. Radó: matematické důkazy existence řešení Plateauova problému.

1936 Fieldsova medaile udělena J. Douglasovi (první ročník udělování cen).

MINIMÁLNÍ PLOCHY

chtíme studovat plochy s následujícími vlastnostmi:

volíme-li libovolný vnitřní bod plochy, pak každé dostatečně malé okolí tohoto bodu představuje plochu, která má ze všech ploch s danou hranicí nejmenší obsah.



plocha s danou hranicí a nejmenším obsahem

Definice Křivka v rovině a domu, aby ^{regulární} plocha $f: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ měla uvedenou vlastnost, je $H(u,v) = 0 \quad \forall (u,v) \in U$.

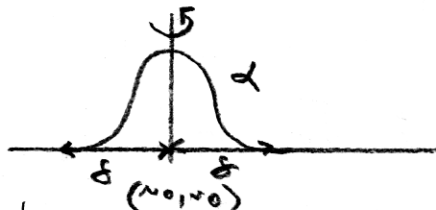
Důkaz Ukažte důkazem, že $H(u_0, v_0) = 0$ pro každý vnitřní bod $(u_0, v_0) \in U$ (na hranici ovšem může ze specifikace).

Sporem, předtím $\exists (u_0, v_0) \quad H(u_0, v_0) \neq 0$.

$\Rightarrow \exists \delta > 0$: H nemění znaménko a je nenulová na množině

$$U = \{ (u,v) \in U : \| (u,v) - (u_0, v_0) \| < \delta \}.$$

předtím α je libovolná diferencovatelná funkce definovaná na U , která je nulová uvnitř a na hranici U a hladká uvnitř U .



$\forall \lambda \in \mathbb{R}$ uvažujeme následující deformaci plochy f :

$$f^\lambda(u,v) = f(u,v) + \lambda \alpha(u,v) n(u,v), \quad (u,v) \in U$$

($\forall \lambda \in \mathbb{R}$ platí $f^\lambda = f$ uvnitř a na hranici U)

$\{g_{ij}^\lambda(u,v)\}_{i,j=1}^2$ -- 1. základní forma f^λ

$$A(\lambda) = \int_U \sqrt{\det \{g_{ij}^\lambda(u,v)\}} \, du dv \quad \dots \text{obsah plochy } f^\lambda|_U$$

Time : A nabývá minima pro $\lambda = 0$, tedy $A'(0) = 0$

$$\forall i \in \{1,2\} \quad \frac{\partial f^\lambda}{\partial u_i} = \frac{\partial f}{\partial u_i} + \lambda \frac{\partial \alpha}{\partial u_i} n + \lambda \alpha \frac{\partial n}{\partial u_i}$$

$$\begin{aligned}
 \forall i, j \in \{1, 2\} \quad g_{ij}^\lambda &= \left(\frac{\partial f}{\partial u_i} + \lambda \frac{\partial \alpha}{\partial u_i} \cdot n + \lambda \alpha \frac{\partial m}{\partial u_i} \right) \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial u_j} + \lambda \frac{\partial \alpha}{\partial u_j} \cdot n + \lambda \alpha \frac{\partial m}{\partial u_j} \right) \\
 &= g_{ij} + \lambda \left(\underbrace{\frac{\partial \alpha}{\partial u_i} \cdot n \cdot \frac{\partial f}{\partial u_j}}_{=0} + \alpha \frac{\partial m}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial f}{\partial u_j} + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial u_j} \cdot n}_{=0} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\partial f}{\partial u_i} \cdot \alpha \frac{\partial m}{\partial u_j} \right) + \lambda^2 a_{ij}(u, v) \\
 &= g_{ij} - 2\lambda \Delta h_{ij} + \lambda^2 a_{ij} \quad \left(\begin{array}{l} \text{negativă diferențabilă funcție} \\ \text{prin urmare:} \\ \frac{\partial f}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial m}{\partial u_j} = -h_{ij} \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

$$\det \{g_{ij}^\lambda\} = (g_{11} - 2\lambda \Delta h_{11} + \lambda^2 a_{11})(g_{22} - 2\lambda \Delta h_{22} + \lambda^2 a_{22}) - (g_{12} - 2\lambda \Delta h_{12} + \lambda^2 a_{12})(g_{21} - 2\lambda \Delta h_{21} + \lambda^2 a_{21})$$

$$\begin{aligned}
 &= \det \{g_{ij}\} - 2\lambda \Delta (h_{11}g_{22} + g_{11}h_{22} - 2g_{12}h_{12}) \\
 &\quad + \lambda^2 b(u, v, \epsilon)
 \end{aligned}$$

negativă diferențabilă funcție

$$= \det \{g_{ij}\} - 4\lambda \Delta \det \{g_{ij}\} + 1 + \lambda^2 b$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{prin urmare:} \\ H = \frac{1}{2} \frac{h_{11}g_{22} + g_{11}h_{22} - 2g_{12}h_{12}}{\det \{g_{ij}\}} \end{array} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \det \{g_{ij}^\lambda\} \Big|_{\lambda=0} = -4\lambda \det \{g_{ij}\} + 1$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial \lambda} \sqrt{\det \{g_{ij}^\lambda\}} \Big|_{\lambda=0} &= -4\lambda \det \{g_{ij}\} + 1 \cdot \frac{1}{2} (\det \{g_{ij}\})^{-1/2} \\
 &= -2\lambda + 1 \sqrt{\det \{g_{ij}\}}
 \end{aligned}$$

$$0 = A'(0) = \int_{\Sigma} \frac{\partial}{\partial \lambda} \sqrt{\det \{g_{ij}^\lambda\}} \Big|_{\lambda=0} du dv$$

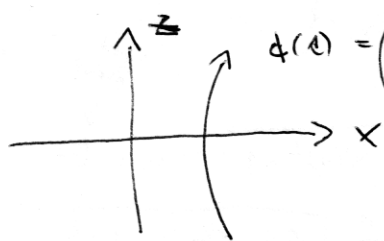
$$= -2 \int_{\Sigma} \underbrace{\alpha(u, v)}_{>0} \underbrace{+1(u, v)}_{\neq 0, \text{ nemăi zero}} \sqrt{\det \{g_{ij}(u, v)\}} du dv, \quad \begin{array}{l} >0 \text{ (regularitate)} \end{array}$$

spar

□

def | Punctul se numește minimă locală, dacă nu există nicio altă valoare mai mică în vecinătate.

minimální rotační plochy



$f(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ 0 \\ z(t) \end{pmatrix}, t \in I$... rotační těleso
 os z
 minimální rotační plocha

$$f(u, v) = \begin{pmatrix} x(u) \cos v \\ x(u) \sin v \\ z(u) \end{pmatrix},$$

$$u \in I, v \in [-\pi, \pi]$$

předp. $\forall u \in I \quad x(u) > 0$ ($\Rightarrow$ regularita f),

BÚNO d par. obklopen, tj. $\forall u \in I \quad x'(u)^2 + z'(u)^2 = 1$

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \begin{pmatrix} x'(u) \cos v \\ x'(u) \sin v \\ z'(u) \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \begin{pmatrix} -x(u) \sin v \\ x(u) \cos v \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \{g_{ij}\} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x(u)^2 \end{pmatrix}$$

$$n = \frac{\frac{\partial f}{\partial u} \times \frac{\partial f}{\partial v}}{\|\frac{\partial f}{\partial u} \times \frac{\partial f}{\partial v}\|} = \begin{pmatrix} -z'(u) \cos v \\ -z'(u) \sin v \\ x'(u) \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} = \begin{pmatrix} x''(u) \cos v \\ x''(u) \sin v \\ z''(u) \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} = \begin{pmatrix} -x'(u) \sin v \\ x'(u) \cos v \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial v^2} = \begin{pmatrix} -x(u) \cos v \\ -x(u) \sin v \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\{h_{ij}\} = \begin{pmatrix} x'(u)z''(u) - x''(u)z'(u) & 0 \\ 0 & x(u)z'(u) \end{pmatrix}$$

$$H = \frac{1}{2} \frac{h_{11}g_{22} + h_{22}g_{11} - 2h_{12}g_{12}}{\det \{g_{ij}\}} = \frac{1}{2} \frac{(x'z'' - x''z')x^2 + xz'}{x^2} =$$

$$= \frac{1}{2} (x'z'' - x''z' + \frac{z'}{x})$$

hledáme minimální plochy, tj. $H \equiv 0$.

a) $\forall u \quad z'(u) = 0 \Rightarrow f$ je cívka rovný

b) $\exists u_0 \quad z'(u_0) \neq 0$

veďme (α, β) je max. interval obsahující u_0 , kde $z' \neq 0$.

Pro $u \in (\alpha, \beta)$ platí:

$$\begin{cases} x'^2 + z'^2 = 1 \\ x''x' + z''z' = 0 \end{cases} \geq \text{derivace}$$

$$(x'z'' - x''z')z' = x'z''z' - x''z'^2 = -x''x'^2 - x''z'^2 = -x''$$

$$\Rightarrow x'z'' - x''z' = -\frac{x''}{z'} \Rightarrow H = \frac{1}{2} \left(\frac{z'}{x} - \frac{x''}{z'} \right)$$

chceme $H=0$, tj.

$$\frac{z'}{x} = \frac{x''}{z'}$$

$$z'^2 = x''x$$

$$1 - x'^2 = x''x$$

$$\frac{x'}{x} = \frac{x''x'}{1 - x'^2}$$

$$\int \frac{x''(u)x'(u)}{1 - x'(u)^2} du = \int \frac{x'(u)}{x(u)} du = \ln x(u)$$

$$\downarrow h = 1 - x'(u)^2$$

$$dh = -2x'(u)x''(u)$$

$$-\frac{1}{2} \int \frac{dh}{h} = -\frac{1}{2} \ln h = -\frac{1}{2} \ln (1 - x'(u)^2)$$

$$\begin{cases} \ln x(u) + \frac{1}{2} \ln (1 - x'(u)^2) = C \\ \ln [x(u) \sqrt{1 - x'(u)^2}] = C \\ x(u) \sqrt{1 - x'(u)^2} = e^C =: \frac{1}{a} \\ 1 - x'(u)^2 = \frac{1}{a^2 x(u)^2} \\ x'(u)^2 = 1 - \frac{1}{a^2 x(u)^2} = \frac{a^2 x(u)^2 - 1}{a^2 x(u)^2} \end{cases}$$

int. konstanta



$$x'(u) = \frac{\sqrt{a^2 x(u)^2 - 1}}{a x(u)}$$

(BÚNO $x'(u) > 0$, jinaš staš' obaldid)
(orientaci līnēz d

$$\int \frac{a x'(u) x(u)}{\sqrt{a^2 x(u)^2 - 1}} du = \int 1 du = u$$

$$\downarrow g = a x(u) \\ \downarrow dg = a x'(u) du$$

$$\frac{1}{a} \int \frac{g dg}{\sqrt{g^2 - 1}} = \frac{1}{a} \sqrt{g^2 - 1} = \frac{1}{a} \sqrt{a^2 x(u)^2 - 1}$$

$$\frac{1}{a} \sqrt{a^2 x(u)^2 - 1} = u + b$$

$$x(u) = \frac{1}{a} \sqrt{1 + a^2 (u+b)^2}$$

BÚNO $b=0$ (jinaš

$\tilde{u} = u+b$ - parametrizācija)

$$\Rightarrow x(u) = \frac{1}{a} \sqrt{1 + a^2 u^2}$$

$$z'(u)^2 = 1 - x'(u)^2 = \frac{1}{a^2 x(u)^2} = \frac{1}{1 + a^2 u^2}$$

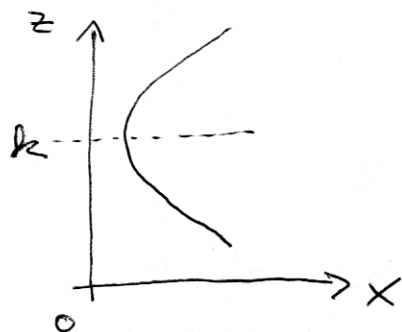
$$z'(u) = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + a^2 u^2}}$$

$$z(u) = \pm \frac{1}{a} \operatorname{arcsinh}(au) + k \leftarrow \text{int. konstanta}$$

$$\pm \sinh[a(z(u) - k)] = au$$

$$x(u) = \frac{1}{a} \sqrt{1 + \sinh^2[a(z(u) - k)]} = \frac{1}{a} \cosh[a(z(u) - k)]$$

Trāz (x(u), z(u)) lēz' na grafu funkce $x = \frac{1}{a} \cosh(a(z-k))$
rēķēzorka



apzīmēt nosauk' no $u \in (\alpha, \beta)$.

Pārē šķē $(\alpha, \beta) \neq \mathbb{R}$?

Pārē. $\beta < \infty$.

$$\forall u \in (\alpha, \beta) \quad z'(u) = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + a^2 u^2}}$$

$$u \rightarrow \beta : z'(\beta) = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + a^2 \beta^2}} \neq 0$$

-- spor s maximalitā (α, β)

analogiski no $\alpha > -\infty$.

Zāvēn: katrā risinānī minimālā plāksnē ir brīd

ēdšd' rorīz neba šadencidn (nos. plāksnā mēģlā
nosacī tēķzorkē).

Další minimální plochy

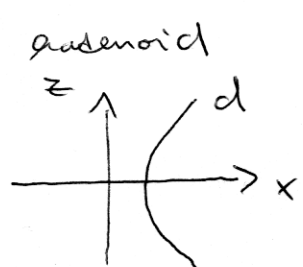
1776 (Poisson): helikoid je min. plocha

1842 (Catalan): každá plynulá min. plocha je částí rotace nebo helikoidu.

helikoid: $f(u,v) = \begin{pmatrix} u \cos v \\ u \sin v \\ cv \end{pmatrix}, u,v \in \mathbb{R}$... plocha vyvinutá hl. rovně a rovně

helio. parametrisace $f_1(u,v) = \begin{pmatrix} c \sinh u \cos v \\ c \sinh u \sin v \\ cu \end{pmatrix}, u,v \in \mathbb{R}$

Seznamte se s částí helikoidu a katenoidem



catenoid $x = c \cosh \frac{z}{c}$
 $d(t) = \begin{pmatrix} c \cosh t \\ 0 \\ ct \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$

$f(u,v) = \begin{pmatrix} c \cosh u \cos v \\ c \cosh u \sin v \\ cu \end{pmatrix}$

helio. parametrisace

$(v \rightarrow v + \pi/2)$
 $f_2(u,v) = \begin{pmatrix} -c \cosh u \sin v \\ c \cosh u \cos v \\ cu \end{pmatrix}, u,v \in \mathbb{R}$

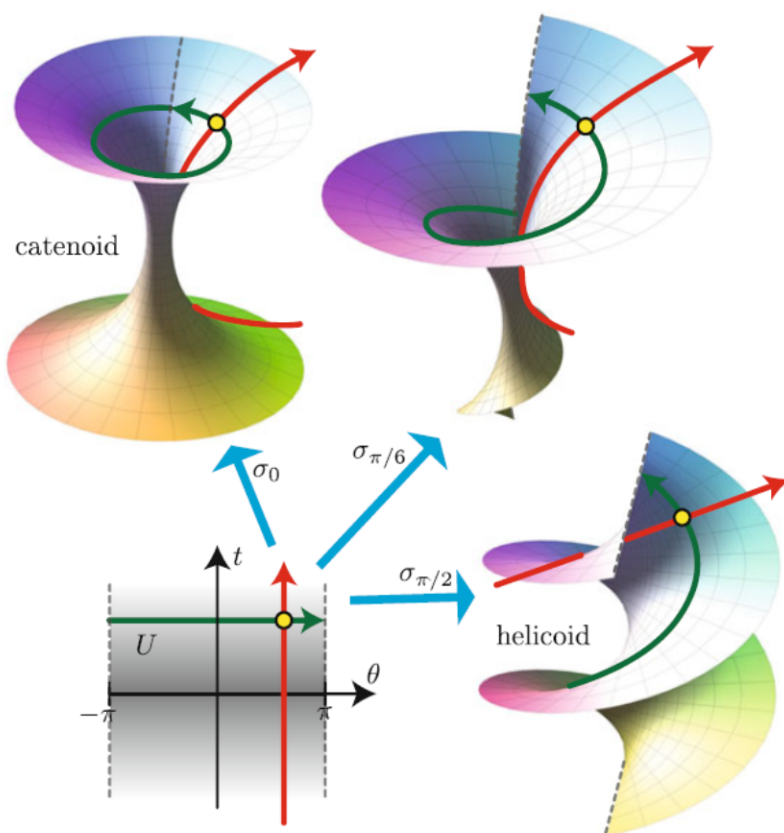
$f^\alpha(u,v) = (\sin \alpha) \underbrace{f_1(u,v)}_{\text{helikoid}} + (\cos \alpha) \underbrace{f_2(u,v)}_{\text{catenoid}}, \alpha \in [0, \pi/2]$
 $u \in \mathbb{R}, v \in (-\pi, \pi)$

$\alpha = 0$: katenoid

$\alpha = \pi/2$: část helikoidu

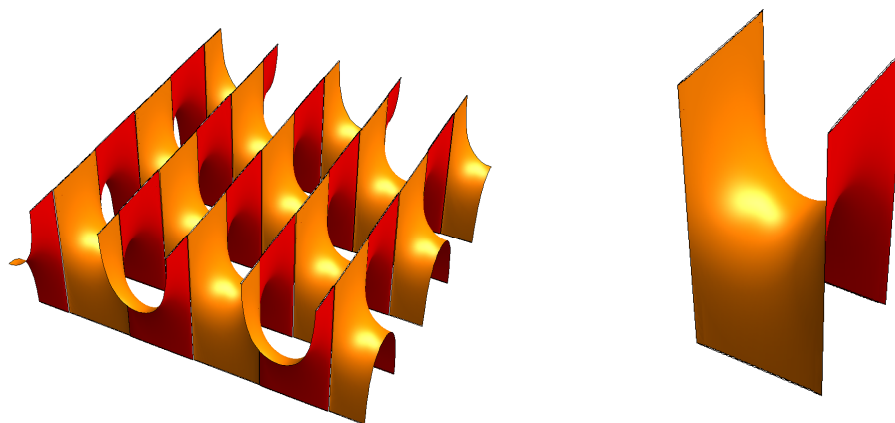
$\forall \alpha \{g_{ij}\} = \begin{pmatrix} c^2 \cosh^2 u & 0 \\ 0 & c^2 \sinh^2 u \end{pmatrix}$

... nezávislost na α , je to izometrická deformace



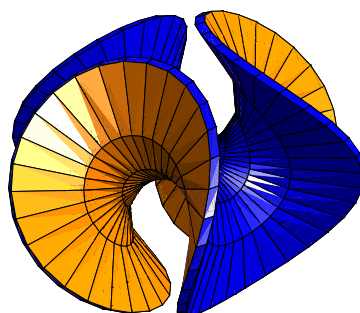
Další minimální plochy

1835 Scherkova minimální plocha: Kromě roviny jediná minimální plocha, která je grafem funkce ve tvaru $f(x, y) = g(x) + h(y)$

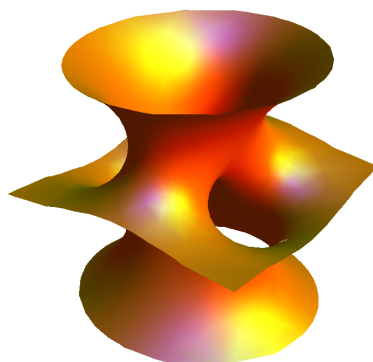


Weierstrassova-Enneperova reprezentace: vztah mezi minimálními plochami a dvojicemi funkcí komplexní proměnné

1863 Enneperova minimální plocha: $f(u, v) = (u - \frac{u^3}{3} + uv^2, -v + \frac{v^3}{3} - vu^2, u^2 - v^2)$ odpovídá dvojici komplexních funkcí $g(z) = 1, h(z) = z$



1982 Costova minimální plocha

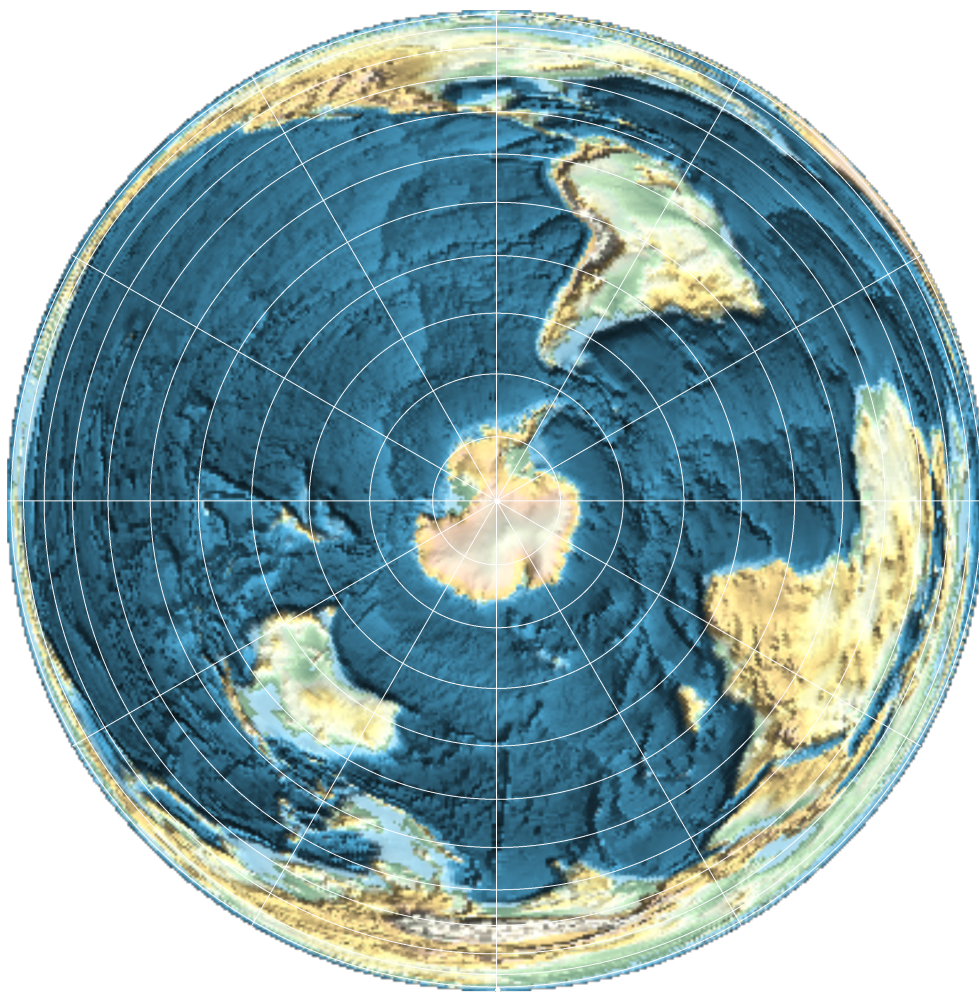


Domácí cvičení (5)

1. Uvažujme sféru o poloměru r parametrizovanou pomocí zeměpisných souřadnic:

$f_1(u, v) = (r \cos u \cos v, r \cos u \sin v, r \sin u)$. Najděte zobrazení F ze sféry bez severního pólu do roviny $z = 0$, které má následující vlastnosti:

- Libovolný poledník odpovídající zeměpisné délce v se zobrazí na polopřímku vycházející z počátku, která svírá s osou x orientovaný úhel v .
- Libovolná rovnoběžka se zobrazí na kružnici se středem v počátku.
- Jižní pól sféry se zobrazí do počátku soustavy souřadnic.
- F je plochojevné zobrazení.



2. a) Necht $c : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$ je křivka parametrizovaná obloukem, jejíž křivost nemění znaménko, a $l > 0$ je libovolné číslo. Uvažujme rovinnou oblast s parametrizací $f(u, v) = c(u) + v c'(u)$, kde $u \in (a, b)$, $v \in [0, l]$. Ukažte, že obsah této oblasti je roven číslu $\frac{l^2}{2} \left| \alpha(b-) - \alpha(a+) \right|$, kde α je úhlové zobrazení příslušné k funkci c' .
- b) Použijte vzorec z části a) k výpočtu obsahu mezikruží, které je ohraničeno kružnicemi o poloměrech $R > r > 0$.
- c) Použijte vzorec z části a) k výpočtu obsahu oblasti, která je ohraničena souřadnicovými osami a traktrix, jež vznikla tažením předmětu na provázku délky l .

Návod. V části a) použijte vzorec pro obsah plochy a Frenetovy vzorce. V částech b), c) se nepokoušejte najít vzorec pro úhlové zobrazení α , přírůstek $\alpha(b-) - \alpha(a+)$ se dá určit elementární geometrickou úvahou.

