Geodetické křivky – opakování

<u>def</u>: nechť $f: U \to \mathbb{R}^3$ je regulární plocha, $c = f \circ \varphi$ je regulární křivka na ploše. Pak c je geodetika, pokud $\forall t$ je $c''(t)$ násobkem $n(\varphi(t))$
(tj. $c''(t)$ je kolmý k ploše v bodě $f(\varphi(t))$).

Pozor: c geodetika $\Rightarrow$ $\|c'\| = \text{konst}$.

<u>věta</u>: nechť $c = f \circ \varphi$ je průnikem roviny ρ a plochy f, $\|c'\| = \text{konst}$. Pak c je geodetika $\Leftrightarrow$ $\forall t$ $n(\varphi(t)) \in \rho$.

<u>věta</u>: $c = f \circ \varphi$ je geodetika

$$\Leftrightarrow \forall t \ \forall k \in \{1,2\} \quad \varphi_k''(t) + \sum_{i,j=1}^{2} \Gamma_{ij}^{k}(\varphi(t))\varphi_i'(t)\varphi_j'(t) = 0,$$

kde $\Gamma_{ij}^{k} = \sum_{l=1}^{2} b_{kl} \dfrac{\partial^2 f}{\partial u_i \partial u_j} \cdot \dfrac{\partial f}{\partial u_l}$ (Christoffelovy symboly)

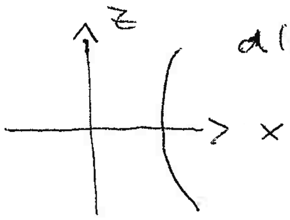
a $\{b_{ij}\} = \{g_{ij}\}^{-1}$.

<u>věta</u>: $f: U \to \mathbb{R}^3$ regulární, $(u_0, v_0) \in U$,

$a = a_1 \dfrac{\partial f}{\partial u}(u_0, v_0) + a_2 \dfrac{\partial f}{\partial v}(u_0, v_0)$, $\|a\| \neq 0$

$\Rightarrow \exists$ právě jedna geodetika $c = f \circ \varphi$ splňující $c(0) = f(u_0, v_0)$, $c'(0) = a$.

Geodetiky na rotačních plochách



$$\alpha(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ 0 \\ z(t) \end{pmatrix}$$ regulární křivka, $x(t) > 0$ (regularita)

↘ rotace kolem osy z

$$f(u,v) = \begin{pmatrix} x(u)\cos v \\ x(u)\sin v \\ z(u) \end{pmatrix}$$ obecná rotační plocha

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \begin{pmatrix} x'(u)\cos v \\ x'(u)\sin v \\ z'(u) \end{pmatrix} \qquad \frac{\partial f}{\partial v} = \begin{pmatrix} -x(u)\sin v \\ x(u)\cos v \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \{g_{ij}\} = \begin{pmatrix} x'(u)^2 + z'(u)^2 & 0 \\ 0 & x(u)^2 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} = \begin{pmatrix} x''(u)\cos v \\ x''(u)\sin v \\ z''(u) \end{pmatrix} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} = \begin{pmatrix} -x'(u)\sin v \\ x'(u)\cos v \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} = \begin{pmatrix} -x(u)\cos v \\ -x(u)\sin v \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\{b_{ij}\} = \begin{pmatrix} \frac{1}{x'(u)^2 + z'(u)^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{x(u)^2} \end{pmatrix}$$

$$\Gamma^1_{11} = b_{11} \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \cdot \frac{\partial f}{\partial u} = \frac{x''(u)x'(u) + z''(u)z'(u)}{x'(u)^2 + z'(u)^2}$$

$$\Gamma^1_{12} = b_{11} \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \cdot \frac{\partial f}{\partial u} = 0 = \Gamma^1_{21}$$

$$\Gamma^1_{22} = b_{11} \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \cdot \frac{\partial f}{\partial u} = -\frac{x(u)x'(u)}{x'(u)^2 + z'(u)^2}$$

využíváme $b_{12} = 0$

$$\Gamma^2_{11} = b_{22} \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \cdot \frac{\partial f}{\partial v} = 0$$

$$\Gamma^2_{12} = b_{22} \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \cdot \frac{\partial f}{\partial v} = \frac{x'(u)x(u)}{x(u)^2} = \frac{x'(u)}{x(u)} = \Gamma^2_{21}$$

$$\Gamma^2_{22} = b_{22} \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \cdot \frac{\partial f}{\partial v} = 0$$

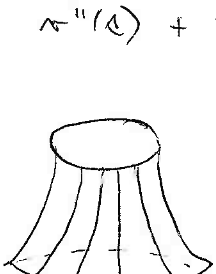
využíváme $b_{21} = 0$

dif. rovnice pro geodetiky:

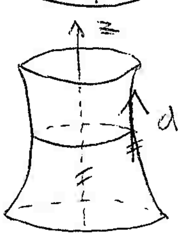
$c = f \circ \varphi$, $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t)) = (u(t), v(t))$

$$u''(t) + \frac{x'(u(t))x''(u(t)) + z'(u(t))z''(u(t))}{x'(u(t))^2 + z'(u(t))^2} u'(t)^2 - \frac{x(u(t))x'(u(t))}{x'(u(t))^2 + z'(u(t))^2} v'(t)^2 = 0$$

$$v''(t) + 2\frac{x'(u(t))}{x(u(t))} u'(t) v'(t) = 0$$



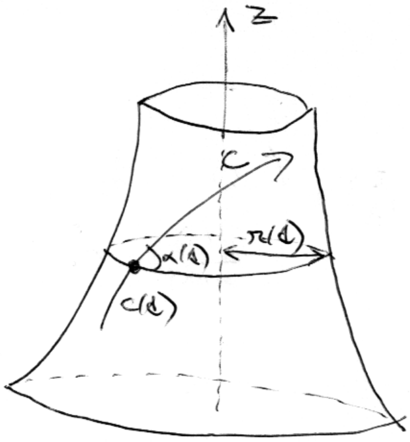
Poledníky (v = konst.) jsou vždy geodetiky.



Rovnoběžka (u = konst.) je geodetika $\Leftrightarrow \alpha'(u) \parallel \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Každá geodetika, která není poledníkem, obíhá kolem osy z ve stále stejném směru. (Sporem: v bodě, kde by se geodetika otáčela, by byla tečna rovnoběžná s poledníkem – spor s jednoznačností).

Věta (Clairaut): Pro každou geodetiku c na rotační ploše platí
$r(t)\cos\alpha(t) = \text{konst.}$, kde $r(t)$ = poloměr rovnoběžky procházející bodem $c(t)$, $\alpha(t)$ = odchylka rovnoběžky a geodetiky c v bodě $c(t)$.



Dk: $c = f\circ\varphi$, kde $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t)) = (u(t), v(t))$

$\alpha(t)$ = odchylka vektorů $c'(t)$, $\frac{\partial f}{\partial v}(\varphi(t))$

$$\cos\alpha(t) = \frac{c'(t)\cdot\frac{\partial f}{\partial v}(\varphi(t))}{\|c'(t)\|\,\|\frac{\partial f}{\partial v}(\varphi(t))\|}$$

$\|c'(t)\| = \text{konst.}$, $\|\frac{\partial f}{\partial v}(\varphi(t))\| = x(u(t))$

$$r(t) = \sqrt{f_1(\varphi(t))^2 + f_2(\varphi(t))^2} = x(u(t))$$

$\rightarrow$ Stačí dokázat $c'(t)\cdot\frac{\partial f}{\partial v}(\varphi(t)) = \text{konst.}$

$$c'(t)\cdot\frac{\partial f}{\partial v}(\varphi(t)) = \left(\frac{\partial f}{\partial u}(\varphi(t))\varphi_1'(t) + \frac{\partial f}{\partial v}(\varphi(t))\varphi_2'(t)\right)\cdot\frac{\partial f}{\partial v}(\varphi(t)) =$$

$$= \underbrace{g_{12}(\varphi(t))}_{=0}\varphi_1'(t) + \underbrace{g_{22}(\varphi(t))}_{=x(u(t))^2}\underbrace{\varphi_2'(t)}_{=v'(t)} = x(u(t))^2 v'(t)$$

z dif. rovnice pro geodetiky: $v''(t) + 2\frac{x'(u(t))}{x(u(t))}u'(t)v'(t) = 0 \quad / \cdot x(u(t))^2$

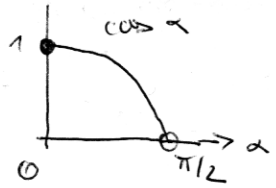
$$x(u(t))^2 v''(t) + 2x(u(t))x'(u(t))u'(t)v'(t) = 0$$
$$(x(u(t))^2 v'(t))' = 0$$

⊠

c geodetika $\Rightarrow$ nastává jedna z možností:

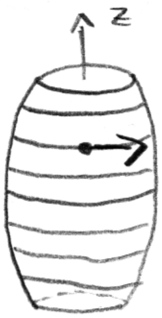
1) $\forall t \ \alpha(t) = \frac{\pi}{2}$ ... poledník
2) $\forall t \ \alpha(t) \in [0, \pi/2)$ ... c obíhá osu z v kladném směru
3) $\forall t \ \alpha(t) \in (\pi/2, \pi]$ ... c obíhá osu z v záporném směru

} BÚNO nastává 2), jinak obrátíme orientaci



Clairaut:
- $r(t)$ roste, $\cos\alpha(t)$ klesá, $\alpha(t)$ roste
- $r(t)$ klesá, $\cos\alpha(t)$ roste, $\alpha(t)$ klesá
- $r(t)$ i $\alpha(t)$ jsou konstantní (válec)

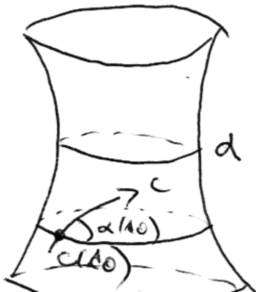
Př



Kam pokračuje tato geodetika?
- α nemůže zůstat 0 (byla by část rovnoběžky, spor)
- α nemůže klesat $\Rightarrow$ α roste, r roste, geodetika míří dolů

př.] (geodetiky na jednodílném rotačním hyperboloidu)

c = geodetika vycházející z bodu $c(s_0)$ v dolní polovině hyperboloidu pod úhlem $\alpha(s_0) \in (0, \pi/2)$ vzhledem k rovnoběžce



d = nejmenší rovnoběžka („hrdlová" rovnoběžka) $\quad r_d$ = její poloměr

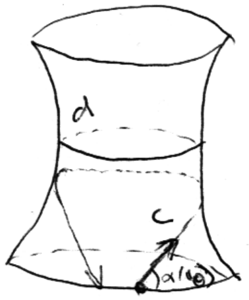
$R = r(s_0) \cos \alpha(s_0)$

Clairaut: $\quad \forall s \quad r(s) \cos \alpha(s) = R$

$$r(s) = \frac{R}{\cos \alpha(s)} \geq R$$

$\Rightarrow$ c se nemůže dostat do oblasti, kde $r(s) < R$

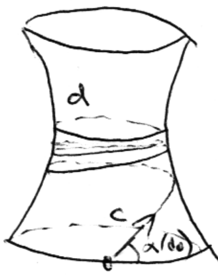
a)



$r_d < R$

$r(s)$ klesá k R,
$\alpha(s)$ klesá k 0,
pak se c otočí zpět dolů (nemůže pokračovat nahoru ani po rovnoběžce)

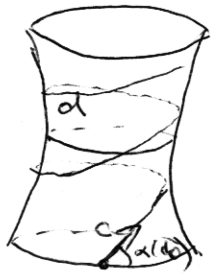
b)



$r_d = R$

$r(s)$ klesá k $R = r_d$,
$\alpha(s)$ klesá k 0
c se nemůže dotknout d (v bodě dotyku by bylo $r(s) = R$, tj. $\alpha(s) = 0$ → spor s jednoznačností)
$\Rightarrow$ c se asymptoticky přibližuje k d

c)



$r_d > R$

$r(s)$ klesá k r_d,
protne d pod úhlem > 0
$\Rightarrow$ pokračuje do horní poloviny hyperboloidu

Shrnutí: aby c překročila d, musí platit

$$R < r_d$$

$$r(s_0) \cos \alpha(s_0) < r_d$$

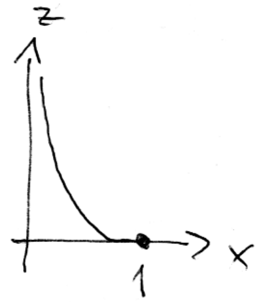
$$\cos \alpha(s_0) < \frac{r_d}{r(s_0)}$$

$$\alpha(s_0) > \arccos \frac{r_d}{r(s_0)}$$

Pozn.] Stejná úvaha platí i pro další rot. plochy podobného typu (např. katenoid).

Geodetiky na pseudosféře

traktrix – standardní parametrizace:



$x(t) = \sin t$

$z(t) = -\cos t + \frac{1}{2}\log(1+\cos t) - \frac{1}{2}\log(1-\cos t)$,

kde $t \in (0, \pi/2]$

změna parametrizace: $t = \arcsin\frac{1}{u}$, $u \in [1,\infty)$ ... $\cos t = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{1-1/u^2}$

$\to x(u) = \frac{1}{u}$

$z(u) = -\sqrt{1-1/u^2} + \frac{1}{2}\log\left(1+\sqrt{1-1/u^2}\right) - \frac{1}{2}\log\left(1-\sqrt{1-1/u^2}\right)$, $u \in [1,\infty)$

pseudosféra = plocha vzniklá rotací traktrix kolem osy z

$$f(u,v) = \begin{pmatrix} x(u)\cos v \\ x(u)\sin v \\ z(u) \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} u \in [1,\infty) \\ v \in \mathbb{R} \end{array}$$

$$\{g_{ij}(u,v)\} = \begin{pmatrix} x'(u)^2 + z'(u)^2 & 0 \\ 0 & x(u)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/u^2 & 0 \\ 0 & 1/u^2 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} x'(u) = -\frac{1}{u^2} \\ z'(u) = \dots = \frac{1}{u}\sqrt{1-\frac{1}{u^2}} \end{array}\right\}$$

nechť $c = f\circ\varphi$ je geodetika, $\varphi(s) = (\varphi_1(s), \varphi_2(s)) = (u(s), v(s))$,

BÚNO c je par. obloukem, tj.

$$1 = \|c'(s)\|^2 = \sum_{i,j=1}^{2} g_{ij}(\varphi(s))\varphi_i'(s)\varphi_j'(s) = \frac{u'(s)^2 + v'(s)^2}{u(s)^2}. \qquad (*)$$

Clairautova věta: $\exists k \in \mathbb{R}\ \forall s\quad r(s)\cos\alpha(s) = k$,

BÚNO $\forall s$ $\alpha(s) \in [0, \pi/2]$, tj. $k \geq 0$ (jinak obrátíme orientaci c)

neboli
$$k = x(u(s))\frac{c'(s)\cdot\frac{\partial f}{\partial v}(\varphi(s))}{\underbrace{\|c'(s)\|}_{=1}\ \underbrace{\|\frac{\partial f}{\partial v}(\varphi(s))\|}_{=x(u(s))}} = c'(s)\cdot\frac{\partial f}{\partial v}(\varphi(s)) =$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial u}(\varphi(s))\varphi_1'(s) + \frac{\partial f}{\partial v}(\varphi(s))\varphi_2'(s)\right)\cdot\frac{\partial f}{\partial v}(\varphi(s)) =$$

$$= \underbrace{g_{12}(\varphi(s))}_{=0}\varphi_1'(s) + g_{22}(\varphi(s))\varphi_2'(s) = \frac{v'(s)}{u(s)^2}$$

Tedy $\frac{v'(s)}{u(s)^2} = k$.

a) $k = 0 \Rightarrow v(s) = \text{konst.}$ ... poledník na pseudosféře

b) $k \neq 0$

$(*) \Rightarrow u'(s)^2 = u(s)^2 - v'(s)^2 = u(s)^2\left(1 - k^2 u(s)^2\right)$

$u'(s) = \pm u(s)\sqrt{1-k^2u(s)^2}$

$v'(s) = k u(s)^2 = \pm\frac{k u(s) u'(s)}{\sqrt{1-k^2u(s)^2}}$

int. konstanta

$v(s) = \pm\int\frac{k u(s) u'(s)}{\sqrt{1-k^2u(s)^2}}\,ds = \mp\frac{1}{k}\sqrt{1-k^2u(s)^2} + v_0$

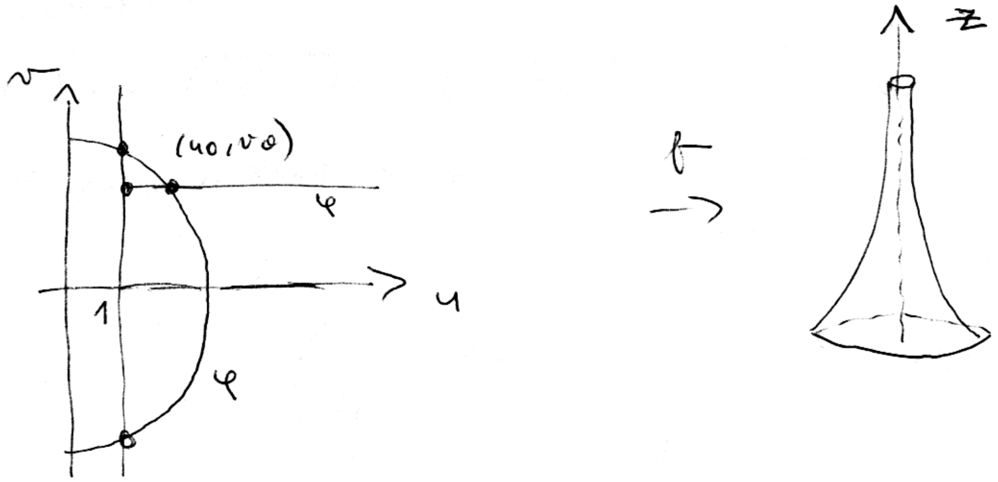
$(v(s)-v_0)^2 + u(s)^2 = \frac{1}{k^2}$ ... $(u(s), v(s))$ leží na kružnici se středem $[0, v_0]$ a poloměrem k

Shrnutí: kandidáty na křivky φ jsou

- polopřímky $v = \text{konst.}$,
- části kružnic se středy na ose v.

Pro každý bod $(u_0, v_0) \in [1,\infty) \times \mathbb{R}$ a předepsaný směr existuje právě jedna taková křivka φ

$\Rightarrow$ $c = f \circ \varphi$ je geodetika na pseudosféře.



Pozn: Poincarého polorovinný model neeukl. geometrie

množina bodů: $H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$

„metrika": $\{g_{ij}(x,y)\}_{i,j=1}^{2} = \begin{pmatrix} 1/y^2 & 0 \\ 0 & 1/y^2 \end{pmatrix}$ (stejná jako u pseudosféry)

Délka křivky $\varphi : [a,b] \to H$, kde $\varphi(t) = (x(t), y(t))$, je

$$\int_a^b \sqrt{\sum_{i,j=1}^{2} g_{ij}(\varphi(t))\,\varphi_i'(t)\,\varphi_j'(t)}\;dt = \int_a^b \sqrt{\frac{x'(t)^2 + y'(t)^2}{y(t)^2}}\;dt$$

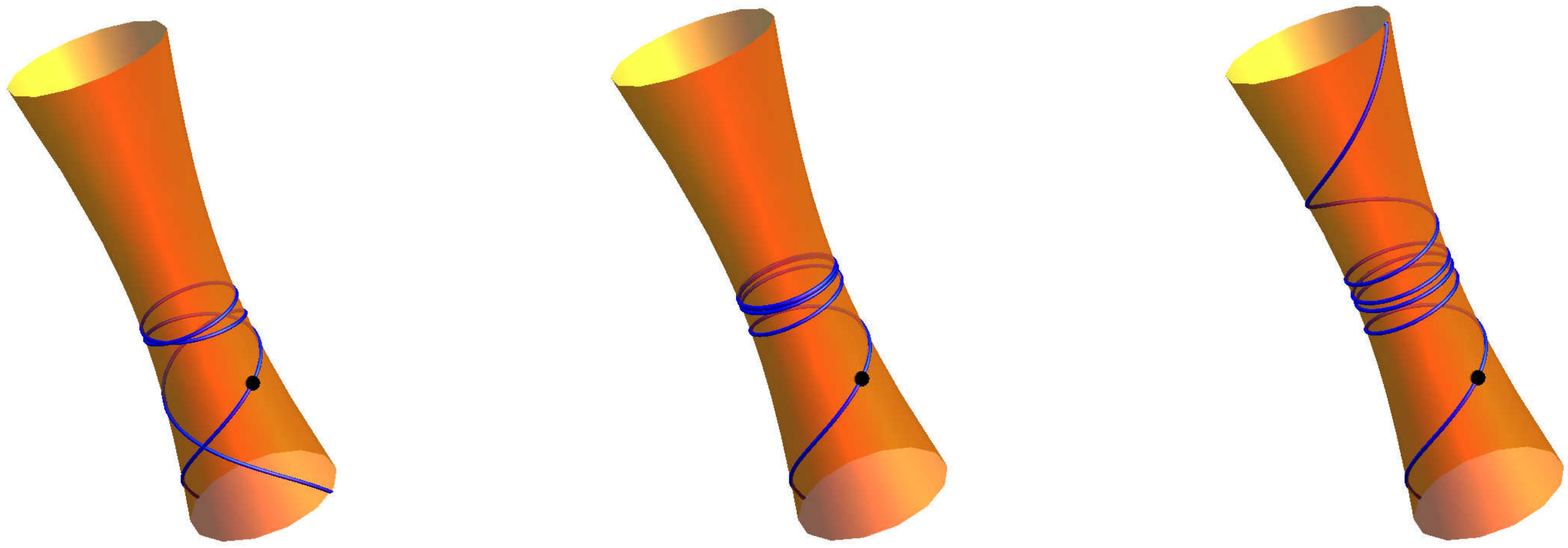
Nejkratší spojnice 2 bodů $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in H$ je

- úsečka, pokud $x_1 = x_2$
- část půlkružnice se středem na ose x, pokud $x_1 \neq x_2$

„Přímky": polopřímky kolmé k ose x, půlkružnice se středem na ose x

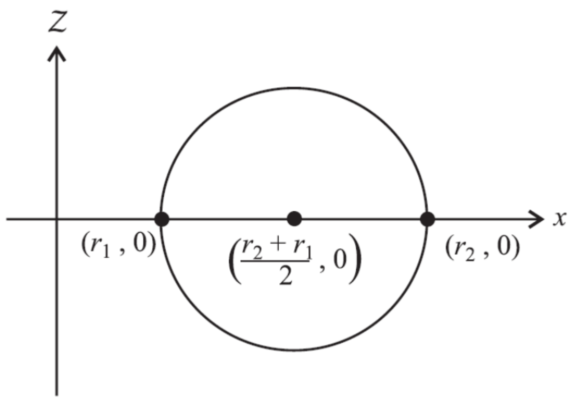
jsou splněny všechny axiomy eukl. geometrie kromě postulátu o rovnoběžkách: je-li dána „přímka" p a bod $X \notin p$, pak existuje nekonečně mnoho „přímek" q obsahujících X, které neprotínají p.

Geodetiky na hyperboloidu



Domácí cvičení (6)

Uvažujme kružnici ležící v rovině xz, jejíž střed je na ose x a její průsečíky s osou x mají od osy z vzdálenosti r_1, r_2.



Rotací kružnice kolem osy z vznikne torus. Mezi jeho rovnoběžkami jsou právě dvě geodetiky – kružnice o poloměrech r_1 („vnitřní rovník") a r_2 („vnější rovník").
Použijte Clairautovu větu k řešení následujících úloh:

1. Vysvětlete, proč každá geodetika na toru kromě vnitřního rovníku musí protnout vnější rovník.
2. Zvolme libovolný bod na vnějším rovníku a uvažujme geodetiku, která prochází tímto bodem a svírá s vnějším rovníkem úhel γ. Geodetika bude vypadat jako na některém z následujících tří obrázků. V závislosti na hodnotách r_1, r_2, γ rozhodněte, který z těchto tří případů nastane.