Další typy rekurentních rovnic řešitelných pomocí generujících funkcí

Antonín Slavík
Matematicko-fyzikální fakulta UK

V minulé přednášce jsme odvodili snadno použitelný postup pro řešení homogenních lineárních rekurentních rovnic s konstantními koeficienty. To ovšem neznamená, že by pro nás metoda generujících funkcí ztratila význam. Na příkladech si ukážeme dva typy úloh, na které se nevztahuje věta z minulé přednášky, dokážeme je však řešit pomocí generujících funkcí.

1 Lineární nehomogenní rovnice

Nejjednodušší lineární nehomogenní rekurentní rovnice s konstantními koeficienty má tvar

$$a_n = \alpha \cdot a_{n-1} + \beta, \quad n \geq 1, \tag{1.1}$$

kde koeficienty α, β a počáteční člen a_0 jsou reálná nebo komplexní čísla.

Uveďme pro ilustraci několik jednoduchých úloh, které vedou na rovnici (1.1):

- *Hanojské věže:* Při řešení úlohy o hanojských věžích (kapitola *Úlohy vedoucí na rekurentní rovnice*) jsme ukázali, že počet kroků a_n potřebných k vyřešení úlohy s n kotouči splňuje rekurentní rovnici $a_n = 2a_{n-1} + 1$, $n \geq 1$.
- *Spořicí účet:* Banka nabízí spořicí účet s roční úrokovou sazbou vyjádřenou desetinným číslem u, přičemž úroky jsou připisovány měsíčně. Za vedení účtu si banka strhává poplatek p korun měsíčně. Jestliže na účet vložíme částku a_0 korun, jaký bude zůstatek na účtu po n měsících? Označíme-li jej a_n, pak ze zadaných údajů vyplývá rekurentní rovnice
$$a_n = \left(1 + \frac{u}{12}\right) a_{n-1} - p, \quad n \geq 1.$$
- *Splácení půjčky:* Banka nám půjčila částku a_0 korun s roční úrokovou sazbou vyjádřenou desetinným číslem u, přičemž zbývající dluh se úročí vždy jednou měsíčně. Jestliže měsíční splátka činí s korun, jaká bude výše dluhu po n měsících? Označíme-li ji a_n, pak ze zadaných údajů vyplývá rekurentní rovnice
$$a_n = \left(1 + \frac{u}{12}\right) a_{n-1} - s, \quad n \geq 1.$$
Pokud známe hodnoty a_0, u a stanovíme si délku splácení na n měsíců, pak chceme vypočítat měsíční splátku s. Toho lze dosáhnout tak, že použijeme vzorec pro n-tý člen posloupnosti (který vzápětí odvodíme), položíme jej rovný nule a z rovnice vypočteme s.

Rovnici (1.1) vyřešíme metodou generujících funkcí, tj. pomocí „tříkrokového“ algoritmu z kapitoly *Generující funkce*. Budeme předpokládat, že $\alpha \neq 1$ (tento případ je triviální – $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ je aritmetická posloupnost s diferencí β a platí $a_n = a_0 + n\beta$).

Nechť $A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ je generující funkce posloupnosti $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$. Platí

$$\{a_n\}_{n=0}^{\infty} = (a_0, \alpha a_0 + \beta, \alpha a_1 + \beta, \ldots) = \alpha(0, a_0, a_1, \ldots) + \beta(1, 1, 1, \ldots) + (a_0 - \beta, 0, 0, \ldots).$$

Na pravé straně máme posloupnosti, jejichž generující funkce umíme vyjádřit: První posloupnost má generující funkci $\alpha z A(z)$, druhá $\beta \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \beta/(1-z)$ a třetí $a_0 - \beta$. Platí tedy

$$A(z) = \alpha z A(z) + \frac{\beta}{1-z} + a_0 - \beta.$$

Odtud vypočteme $A(z)$:

$$A(z) = \frac{\frac{\beta}{1-z} + a_0 - \beta}{1 - \alpha z} = \frac{\beta}{(1-z)(1-\alpha z)} + \frac{a_0 - \beta}{1 - \alpha z}$$

Vidíme, že se jedná o racionální funkci. Uhodnutím nebo pomocí standardního algoritmu pro rozklad na parciální zlomky zjistíme, že[1]

$$\frac{1}{(1-z)(1-\alpha z)} = \frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{1}{1-z} - \frac{\alpha}{1-\alpha z}\right)$$

a tudíž

$$\begin{aligned}A(z) &= \frac{\beta}{1-\alpha}\left(\frac{1}{1-z} - \frac{\alpha}{1-\alpha z}\right) + \frac{a_0-\beta}{1-\alpha z} = \frac{\beta}{1-\alpha}\frac{1}{1-z} + \left(a_0 - \beta - \frac{\alpha\beta}{1-\alpha}\right)\frac{1}{1-\alpha z} = \\ &= \frac{\beta}{1-\alpha}\sum_{n=0}^{\infty} z^n + \left(a_0 - \beta\left(1 + \frac{\alpha}{1-\alpha}\right)\right)\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \left(\frac{\beta}{1-\alpha} + \left(a_0 + \frac{\beta}{\alpha - 1}\right)\alpha^n\right).\end{aligned}$$

Vzorec pro n-tý člen posloupnosti $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ je dán koeficientem u z^n v $A(z)$, tedy

$$a_n = \frac{\beta}{1-\alpha} + \left(a_0 + \frac{\beta}{\alpha-1}\right)\alpha^n, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Můžeme si všimnout, že ve speciálním případě $\beta = 0$, kdy je rekurentní rovnice homogenní, dostáváme geometrickou posloupnost $a_n = a_0\alpha^n$.

2 Soustavy rekurentních rovnic

Metoda generujících funkcí se dá použít i na soustavy rekurentních rovnic. Místo obecné teorie si ukážeme konkrétní příklad. Jde o těžší variantu úlohy o dlaždicích z kapitoly *Fibonacciho čísla*.

Kolika způsoby lze pomocí domin, tj. dlaždic o rozměrech 1×2*, vyplnit obdélník o rozměrech* $3 \times n$*?*

Nechť U_n značí hledaný počet způsobů. Je zřejmé, že pro lichá n je obsah obdélníku $3 \times n$ liché číslo, tudíž obdélník nelze pokrýt dominy a platí $U_1 = U_3 = \cdots = 0$. Pro $n = 2$ existují tři možnosti (tři vodorovná domina, jedno vodorovné pod dvěma svislými, jedno vodorovné nad dvěma svislými), tj. $U_2 = 3$.

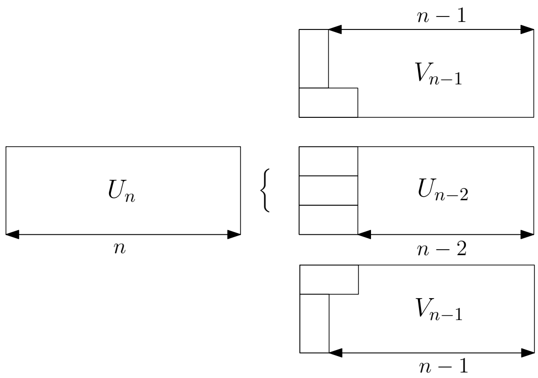
Dále budeme postupovat podobně jako v úloze o vyplňování obdélníku $2 \times n$ – zkusíme odvodit rekurentní rovnici pro U_n tak, že rozebereme případy, jak může dláždění začínat. Situaci znázorňuje obrázek 1.

Začneme-li třemi vodorovnými dominy, zbývá vyplnit obdélník $3 \times (n-2)$, což lze učinit U_{n-2} způsoby. Začneme-li svislým dominem položeným na vodorovném dominu, pak zbývá vyplnit obdélník $3 \times (n-1)$ bez jednoho rohového políčka a nelze říct, jak bude dláždění pokračovat. Situace je symetrická, pokud začneme vodorovným dominem položeným na svislém dominu. Pokud zavedeme označení V_n pro počet způsobů, jak pomocí domin vyplnit obdélník $3 \times n$ bez rohového políčka (zřejmě nezáleží na tom, o který roh se jedná), pak z obrázku vidíme, že pro $n \geq 3$ platí

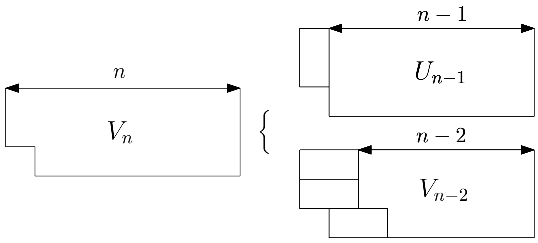
$$U_n = U_{n-2} + 2V_{n-1}. \tag{2.1}$$

Potřebujeme zjistit, jak počítat čísla V_n. Je zřejmé, že $V_1 = 1$ a dále $V_2 = V_4 = \cdots = 0$, protože pro sudé n je obsah obdélníku $3 \times n$ bez rohového políčka liché číslo. Rozborem případů zkusíme odvodit rekurentní rovnici pro V_n. Situaci tentokrát znázorňuje obrázek 2.

[1] V tomto kroku využíváme skutečnost, že $\alpha \neq 1$.



Obrázek 1: Tři způsoby, jak začít vyplňovat obdélník $3 \times n$ pomocí domin



Obrázek 2: Dva způsoby, jak začít vyplňovat obdélník $3 \times n$ bez rohového políčka pomocí domin

Začneme-li jedním svislým dominem, pak zbývá vyplnit obdélník $3 \times (n-1)$, což lze učinit U_{n-1} způsoby. Jediná další možnost je, že začneme dvěma vodorovnými dominy, pod kterými pak nutně musí ležet třetí vodorovné domino. Poté zbývá vyplnit obdélník $3 \times (n-2)$ bez rohového políčka, což lze učinit V_{n-2} způsoby. Pro $n \geq 3$ tedy platí

$$V_n = U_{n-1} + V_{n-2}. \tag{2.2}$$

Dospěli jsme k soustavě rekurentních rovnic pro U_n a V_n, pomocí kterých lze postupně počítat jednotlivé členy těchto posloupností. Naším cílem je však najít explicitní vzorec pro U_n.

Protože chceme použít metodu generujících funkcí, musíme dodefinovat U_0 a V_0. Lze to udělat libovolným způsobem, nejjednodušší je však položit $U_0 = 1$ a $V_0 = 0$, čímž dosáhneme toho, že rekurentní rovnice (2.1) a (2.2) budou platit pro každé $n \geq 2$.

Nyní můžeme definovat generující funkce $U(z) = \sum_{n=0}^{\infty} U_n z^n$ a $V(z) = \sum_{n=0}^{\infty} V_n z^n$.

Víme, že platí

$$\{U_n\}_{n=0}^{\infty} = (1, 0, U_0 + 2V_1, U_1 + 2V_2, \ldots) = (0, 0, U_0, U_1, \ldots) + 2(0, V_0, V_1, \ldots) + (1, 0, 0, \ldots),$$
$$\{V_n\}_{n=0}^{\infty} = (0, 1, U_1 + V_0, U_2 + V_1, \ldots) = (0, U_0, U_1, \ldots) + (0, 0, V_0, V_1, \ldots).$$

Přechodem od posloupností k jejich generujícím funkcím obdržíme

$$U(z) = z^2 U(z) + 2zV(z) + 1,$$
$$V(z) = zU(z) + z^2 V(z).$$

Z druhé rovnice vyjádříme

$$V(z) = \frac{zU(z)}{1 - z^2}$$

a dosadíme do první rovnice:

$$U(z) = z^2 U(z) + \frac{2z^2}{1 - z^2} U(z) + 1$$

Tím jsme eliminovali $V(z)$ a můžeme vypočítat $U(z)$:

$$
\begin{aligned}
U(z)\left(1 - z^2 - \frac{2z^2}{1-z^2}\right) &= 1 \\
U(z)\frac{(1-z^2)^2 - 2z^2}{1-z^2} &= 1 \\
U(z) &= \frac{1-z^2}{1-4z^2+z^4}
\end{aligned}
$$

Nyní potřebujeme rozvinout U do mocninné řady. Můžeme si ušetřit práci: Místo toho, abychom racionální funkci U rozkládali na parciální zlomky (což je pracné, neboť polynom ve jmenovateli má stupeň 4), všimneme si, že v jejím předpisu vystupují pouze sudé mocniny z. Konkrétně platí $U(z) = W(z^2)$, kde

$$W(z) = \frac{1-z}{1-4z+z^2}.$$

Proto stačí, když do mocninné řady rozvineme funkci W, a následně místo z dosadíme z^2.

Kvadratický polynom ve jmenovateli W má diskriminant 12 a kořeny

$$z_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{12}}{2} = 2 \pm \sqrt{3}.$$

Rozklad W na parciální zlomky tedy má tvar

$$W(z) = \frac{1-z}{(z-z_1)(z-z_2)} = \frac{a}{z-z_1} + \frac{b}{z-z_2}$$

a potřebujeme najít koeficienty a, b. Má platit

$$1 - z = a(z-z_2) + b(z-z_1).$$

Porovnáním koeficientů u z^1 a z^0 na levé a na pravé straně dostaneme soustavu rovnic

$$
\begin{aligned}
-1 &= a + b, \\
1 &= -az_2 - bz_1.
\end{aligned}
$$

Z první rovnice vyjádříme $b = -1 - a$ a dosadíme do druhé rovnice, odkud vypočteme a a poté zpětným dosazením b:

$$
\begin{aligned}
1 &= -az_2 + z_1 + az_1 \\
a &= \frac{1-z_1}{z_1-z_2} = -\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} \\
b &= -1 + \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}
\end{aligned}
$$

Rozvineme W do mocninné řady:

$$W(z) = -\frac{a}{z_1}\frac{1}{1-z/z_1} - \frac{b}{z_2}\frac{1}{1-z/z_2} = -\frac{a}{z_1}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{z_1}\right)^n - \frac{b}{z_2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{z_2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \left(-\frac{a}{z_1^{n+1}} - \frac{b}{z_2^{n+1}}\right)$$

Koeficient u z^n můžeme ještě zjednodušit tím, že využijeme rovnosti $z_1 z_2 = 1$, která plyne z Viétových vztahů:

$$W(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \left(-az_2^{n+1} - bz_1^{n+1}\right)$$

Nyní se vrátíme k původní generující funkci U:

$$U(z) = W(z^2) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{2n} \left(-az_2^{n+1} - bz_1^{n+1}\right).$$

Hledaný vzorec pro U_n získáme jako koeficient u z^n. Koeficienty u lichých mocnin z jsou nulové a tudíž $U_1 = U_3 = \cdots = 0$, což jsme vypozorovali již na začátku. Z koeficientů u sudých mocnin z zjistíme, že

$$U_{2n} = -az_2^{n+1} - bz_1^{n+1} = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}(2-\sqrt{3})^{n+1} - \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}(2+\sqrt{3})^{n+1},$$

čímž je úloha vyřešena.

Poznámka 2.1. Viděli jsme, že řešení úlohy o vyplňování obdélníku $3 \times n$ bylo podstatně složitější, než v případě obdélníku $2 \times n$. Pro zajímavost uveďme, že v roce 1961 byl objeven obecný vzorec pro počet způsobů, jak pomocí domin vyplnit obdélník $m \times n$:

$$\prod_{i=1}^{m} \prod_{j=1}^{n} \left(4\cos^2 \frac{i\pi}{m+1} + 4\cos^2 \frac{j\pi}{n+1}\right)^{1/4}$$

Odvození je značně netriviální a kromě kombinatoriky využívá i poznatků z lineární algebry. Následující tabulka udává příslušné hodnoty pro $m, n \in \{1, \ldots, 8\}$.

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	1	0	1	0	1	0	1
2	1	2	3	5	8	13	21	34
3	0	3	0	11	0	41	0	153
4	1	5	11	36	95	281	781	2245
5	0	8	0	95	0	1183	0	14824
6	1	13	41	281	1183	6728	31529	167089
7	0	21	0	781	0	31529	0	1292697
8	1	34	153	2245	14824	167089	1292697	12988816

Je zřejmé, že obdélník $m \times n$ lze dominy pokrýt aspoň jedním způsobem, právě když aspoň jedno z čísel m, n je sudé.

Poznámka 2.2. Úloha o dlaždicích ukazuje obecný postup řešení soustav rekurentních rovnic. Každou rekurentní rovnici převedeme na rovnici pro generující funkce. Z takto získané soustavy rovnic vypočteme jednotlivé generující funkce a rozvineme je do mocninných řad. V úloze o dlaždicích jsme z dvojice generujících funkcí U, V vypočítali a rozvinuli pouze U, což nám stačilo k vyřešení zadané úlohy. Pokud bychom dopočítali a rozvinuli i funkci V, získali bychom vzorec pro počet způsobů V_n, jak pomocí domin pokrýt obdélník $3 \times n$ bez rohového políčka.