Fibonacciho čísla

Antonín Slavík
Matematicko-fyzikální fakulta UK

Fibonacciho čísla jsou patrně nejznámější číselnou posloupností v kombinatorice i v celé matematice. Ukážeme si několik úloh vedoucích na Fibonacciho čísla a poté prostudujeme některé jejich vlastnosti.

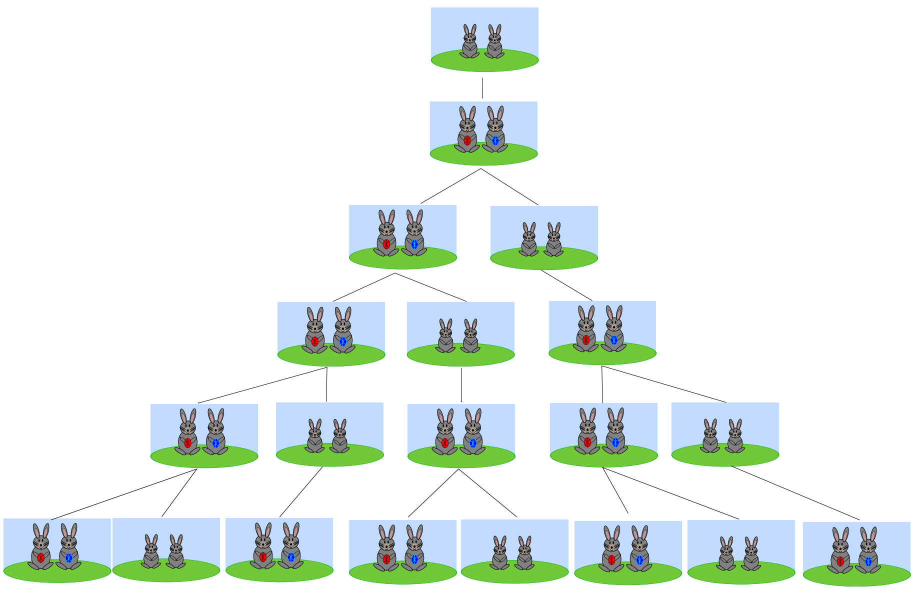
1 Úloha o králících a definice Fibonacciho čísel

Fibonacciho čísla jsou pojmenována na počet Leonarda Pisánského (zvaného Fibonacci). V jeho učebnici aritmetiky *Liber Abaci* z roku 1202 se vyskytuje následující úloha.

Máme pár čerstvě narozených králíků. Kolik párů budeme mít po dvanácti měsících, jestliže

- *každý králík dospívá za jeden měsíc,*
- *každému dospělému páru se každý měsíc narodí další pár,*
- *králíci nehynou?*

Je zřejmé, že v úloze nejsou podstatní jednotliví králíci, ale páry. Nechť F_n je počet párů po n měsících; chceme vypočítat F_{12}. Následující obrázek a tabulka ukazují vývoj králičí populace během prvních pěti měsíců.



Obrázek 1: Ilustrace k Fibonacciho úloze o králících (převzato z Wikimedia Commons, `https://commons.wikimedia.org/wiki/File:FibonacciRabbit.svg`)

n	0	1	2	3	4	5
párů po n měsících (F_n)	1	1	2	3	5	8
dospělých párů po n měsících	0	1	1	2	3	5

Třetí řádek tabulky je jen posunutou verzí druhého řádku, neboť počet dospělých párů po n měsících je roven počtu všech párů po $n-1$ měsících. Jak vznikají čísla F_n ve druhém řádku? Počet párů po n měsících (F_n) je součtem počtu párů po $n-1$ měsících (F_{n-1}) a počtu nově narozených párů. Ten je dán počtem dospělých párů po $n-1$ měsících, nebo ekvivalentně počtem všech párů po $n-2$ měsících. Platí tedy $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, neboli každý člen posloupnosti $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$ s výjimkou prvních dvou je součtem předchozích dvou členů. Na základě této informace vypočteme další členy posloupnosti:

$$F_6 = 13, \quad F_7 = 21, \quad F_8 = 34, \quad F_9 = 55, \quad F_{10} = 89, \quad F_{11} = 144, \quad F_{12} = 233.$$

Definice 1.1. Posloupnost čísel $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$ definovaná počátečními členy $F_0 = F_1 = 1$ a rekurentním vztahem $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ pro $n \geq 2$ se nazývá Fibonacciho posloupnost.

Poznámka 1.2. V literatuře i na internetu se lze setkat s mírně odlišnou definicí, kde první dva členy posloupnosti jsou $F_0 = 0$ a $F_1 = 1$, čímž dojde k posunutí celé posloupnosti o jeden člen. Při studiu zdrojů věnovaných Fibonacciho číslům je tedy nutné mít na paměti, s jakou definicí autor pracuje.

2 Další úlohy vedoucí na Fibonacciho čísla

Kromě úlohy o králících existuje velké množství dalších úloh vedoucích na Fibonacciho čísla; představíme si některé z nich.

2.1 Úloha o dlaždicích, 1. varianta

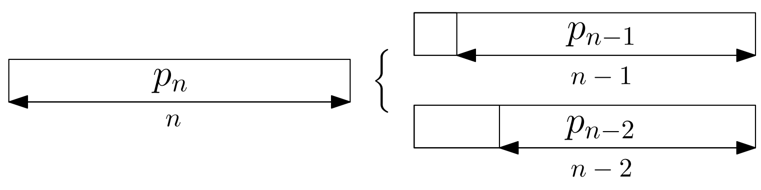
Kolika způsoby lze pomocí dlaždic o rozměrech 1×1 a 1×2 vyplnit obdélník o rozměrech $1 \times n$?

Jak je v kombinatorice obvyklé, budeme dlaždice 1×2 zkráceně nazývat domina a dlaždice 1×1 budou monomina. Nechť p_n značí hledaný počet způsobů, jak pomocí monomin a domin vyplnit obdélník $1 \times n$.

Snadno zjistíme p_n pro nízké hodnoty $n \in \mathbb{N}$: $p_1 = 1$ (1 monomino), $p_2 = 2$ (jedno domino nebo dvě monomina), $p_3 = 3$ (monomino a domino, nebo domino a monomino, nebo tři monomina). Úloha dává smysl i pro $n = 0$, kdy je rozumné položit $p_0 = 1$, neboť obdélník s nulovým obsahem lze vyplnit jediným způsobem – nevezmeme žádnou dlaždici.

Předchozí hodnoty se shodují s Fibonacciho čísly, což napovídá, že by mohlo platit $p_n = F_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}_0$. Ukažme, že členy posloupnosti $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ splňují stejnou rekurentní rovnici, jako Fibonacciho čísla.

Obdélník $1 \times n$, kde $n \geq 2$, lze vyplnit p_n způsoby a jsou dvě možnosti, jak začít: buď monominem, nebo dominem (viz obrázek 2). V prvním případě zbývá vyplnit obdélník $1 \times (n-1)$, což lze učinit p_{n-1} způsoby. Ve druhém případě zbývá vyplnit obdélník $1 \times (n-2)$, což lze učinit p_{n-2} způsoby.



Obrázek 2: Dva způsoby, jak začít vyplňovat obdélník $1 \times n$ pomocí monomin a domin

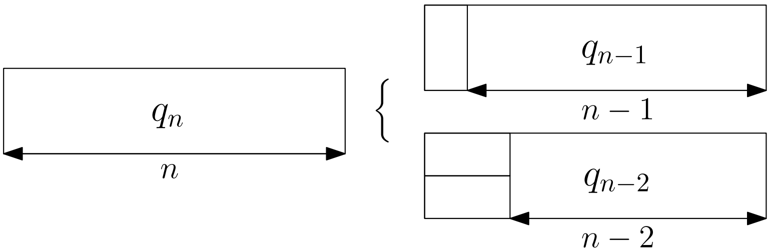
Z předchozí úvahy vyplývá, že pro každé $n \geq 2$ platí $p_n = p_{n-1} + p_{n-2}$. Jelikož $p_0 = 1$ a $p_1 = 1$, vidíme, že musí platit $p_n = F_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}_0$.

2.2 Úloha o dlaždicích, 2. varianta

Kolika způsoby lze pomocí dlaždic o rozměrech 1×2 vyplnit obdélník o rozměrech $2 \times n$?

Nechť q_n je hledaný počet způsobů. V porovnání s předchozí úlohou máme pouze domina, pomocí kterých vyplňujeme obdélník $2 \times n$, jinak je ale řešení velmi podobné.

Jsou dvě možnosti, jak začít vyplňovat obdélník $2 \times n$: buď jedním svislým dominem, nebo dvojicí vodorovných domin (viz obrázek 3). V prvním případě zbývá vyplnit obdélník $2 \times (n-1)$, což lze učinit q_{n-1} způsoby. Ve druhém případě zbývá vyplnit obdélník $2 \times (n-2)$, což lze učinit q_{n-2} způsoby.



Obrázek 3: Dva způsoby, jak začít vyplňovat obdélník $2 \times n$ pomocí domin

Z předchozí úvahy vyplývá, že pro každé $n \geq 2$ platí $q_n = q_{n-1} + q_{n-2}$. Jelikož $q_0 = 1$ (nepoužijeme žádné domino) a $q_1 = 1$ (jedno svislé domino), vidíme, že musí platit $q_n = F_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}_0$.

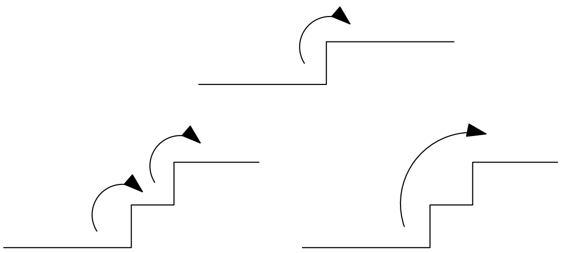
Poznámka 2.1. Mezi oběma variantami úlohy o dlaždicích je jednoduchý vztah. Dláždění ve druhé variantě úlohy jsou vždy souměrná podle vodorovné osy obdélníku. Jinými slovy, v dláždění se mohou objevit pouze svislá domina a dvojice vodorovných domin, která mají společnou delší stranu. Rozpůlením takového dláždění podél vodorovné osy získáme dvě identická dláždění obdélníku $1 \times n$ složená z monomin a domin. Tuto konstrukci lze obrátit a z libovolného dláždění obdélníku $1 \times n$ složeného z monomin a domin vyrobit dláždění obdélníku $2 \times n$ pomocí domin (z monomin se stanou svislá domina, z domin vzniknou dvojice vodorovných domin). Je tedy zřejmé, že obě úlohy jsou vlastně totožné a platí $p_n = q_n$.

2.3 Úloha o schodišti

Kolika způsoby lze vystoupat po schodišti o n schodech, jestliže v každém kroku můžeme vynechat nejvýše 1 schod?

Tato úloha není zadána zcela jednoznačně, je třeba ji chápat následujícím způsobem: Na každý schod, který vstoupíme, šlápneme levou i pravou nohou a nezáleží na tom, v jakém pořadí to učiníme.

Existuje např. pouze jeden způsob, jak zdolat 1 schod, a dva způsoby, jak vystoupat po 2 schodech (první schod buď vynecháme, nebo nevynecháme); viz obrázek 4.



Obrázek 4: Způsoby, jak zdolat schodiště s jedním schodem (nahoře) a dvěma schody (dole)

Nechť r_n značí hledaný počet způsobů. Již víme, že platí $r_1 = 1$ a $r_2 = 2$. Dalším rozborem případů se dá zjistit, že $r_3 = 3$, $r_4 = 5$ atd. Zdá se tedy, že by mohlo platit $r_n = F_n$.

n schodů lze zdolat r_n způsoby a existují dvě možnosti, jak začít:

- Šlápneme na 1. schod; pak zbývá $n - 1$ schodů, které lze zdolat r_{n-1} způsoby.
- Vynecháme 1. schod a šlápneme na 2. schod; pak zbývá $n - 2$ schodů, které lze zdolat r_{n-2} způsoby.

Tento rozbor případů ukazuje, že pro $n \geq 3$ platí $r_n = r_{n-1} + r_{n-2}$. Jde o stejnou rekurentní rovnici jako u Fibonacciho čísel, shodují se i členy $r_1 = F_1$ a $r_2 = F_2$. Platí tedy $r_n = F_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.

2.4 Házení mincí

Hodíme-li n-krát mincí, jaká je pravděpodobnost, že nikdy nepadne dvakrát po sobě rub?

Každou posloupnost hodů můžeme zapsat jako uspořádanou n-tici sestavenou z písmen R a L značících rub a líc.

Hledaná pravděpodobnost je dána zlomkem, v jehož jmenovateli je celkový počet možností, čili 2^n. Zbývá určit počet příznivých případů, tj. uspořádaných n-tic neobsahujících dvě písmena R těsně vedle sebe. Nechť a_n je počet takových n-tic. Pak $a_1 = 2$ (R a L), $a_2 = 3$ (RL, LR, LL), $a_3 = 5$ (RLR, RLL, LRL, LLL, LLR). Zdá se tedy, že by mohlo platit $a_n = F_{n+1}$.

Všechny přípustné n-tice písmen R a L lze rozdělit do dvou skupin:

- n-tice začíná písmenem L, po němž následuje libovolná přípustná $(n - 1)$-tice.
- n-tice začíná písmenem R. Po něm nutně musí následovat L a poté libovolná přípustná $(n - 2)$-tice.

Počet n-tic prvního druhu je a_{n-1} a počet n-tic druhého druhu je a_{n-2}, z čehož plyne $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ pro každé $n \geq 3$.

Jelikož $a_1 = 2 = F_2$, $a_2 = 3 = F_3$ a každý další člen posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je součtem předchozích dvou, dostáváme opět Fibonacciho čísla, konkrétně $a_n = F_{n+1}$.

Hledaná pravděpodobnost je $P = F_{n+1}/2^n$.

Cvičení 2.2. Jaká je limita získaných pravděpodobností pro $n \to \infty$? Zkuste na tuto otázku odpovědět po přečtení následujícího oddílu.

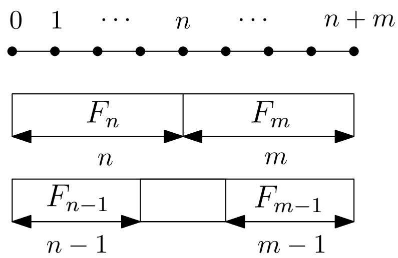
3 Vlastnosti Fibonacciho čísel

Výpočet Fibonacciho čísel pomocí rekurentního vzorce je zdlouhavý, např. pro výpočet F_{100} musíme nejprve určit $F_0, \ldots, F_{99}$. Ukážeme si efektivnější způsoby výpočtu Fibonacciho čísel.

Věta 3.1. *Pro každou dvojici čísel $m, n \in \mathbb{N}$ platí $F_{n+m} = F_n F_m + F_{n-1} F_{m-1}$.*

Důkaz. K důkazu využijeme kombinatorickou interpretaci Fibonacciho čísel z 1. varianty úlohy o dlaždicích. Na levé straně dokazovaného vztahu stojí F_{n+m}, což je počet způsobů, jak vyplnit obdélník $1 \times (n + m)$ pomocí monomin a domin. Všechna taková dláždění lze rozdělit do dvou skupin podle toho, jaká situace nastává ve vzdálenosti n od levého okraje obdélníku (viz obrázek 5):

- V daném místě se dotýkají dvě dlaždice. Každé takové dláždění vzniká spojením dláždění obdélníku $1 \times n$ a dláždění obdélníku $1 \times m$.
- V daném místě se nachází střed domina. Každé takové dláždění vzniká spojením dláždění obdélníku $1 \times (n - 1)$, domina a dláždění obdélníku $1 \times (m - 1)$.



Obrázek 5: Dvě možnosti pro dláždění obdélníku $1 \times (n+m)$ pomocí monomin a domin v závislosti na tom, zda ve vzdálenosti n od levého okraje leží či neleží střed domina

Počet dláždění prvního druhu je $F_n F_m$ a počet dláždění druhého druhu je $F_{n-1}F_{m-1}$, čímž je důkaz dokončen. □

Je-li $m = n$, pak z přechozí věty plyne

$$F_{2n} = F_n^2 + F_{n-1}^2. \tag{3.1}$$

Pro $m = n + 1$ z přechozí věty a ze vztahu $F_n = F_{n+1} - F_{n-1}$ obdržíme

$$F_{2n+1} = F_n F_{n+1} + F_{n-1} F_n = F_n(F_{n+1} + F_{n-1}) = (F_{n+1} - F_{n-1})(F_{n+1} + F_{n-1}) = F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2. \tag{3.2}$$

Vzorec (3.1) lze využít k výpočtu Fibonacciho čísel se sudými indexy a vzorec (3.2) pro liché indexy. V obou případech převádíme výpočet Fibonacciho čísla na výpočet dvou Fibonacciho čísel s přibližně polovičními indexy.

Máme-li např. vypočítat F_{100}, pak z prvního vzorce ($n = 50$) plyne

$$F_{100} = F_{50}^2 + F_{49}^2.$$

Následným použitím prvního ($n = 25$) a druhého ($n = 24$) vzorce dostaneme

$$F_{50} = F_{25}^2 + F_{24}^2, \quad F_{49} = F_{25}^2 - F_{23}^2.$$

Tím jsme výpočet hodnot $F_0, \ldots, F_{100}$ zredukovali zhruba na čtvrtinu: stačí najít $F_0, \ldots, F_{25}$ a poté dopočítat F_{49}, F_{50}, F_{100}. Pokud je pro nás sestavování tabulky $F_0, \ldots, F_{25}$ stále příliš pracné, můžeme pokračovat rozložením F_{23}, F_{24} a F_{25} pomocí vzorců (3.1) a (3.2).

Přechozí postup ukazuje, jak urychlit počítání Fibonacciho čísel, má však stále rekurentní charakter (převádíme výpočet jednoho Fibonacciho čísla na výpočet jiných čísel). Bylo by možné se rekurentním postupům vyhnout a najít explicitní vzorec pro F_n? Takový vzorec je uveden v následující větě, kterou dokážeme matematickou indukcí. Otázku, jak na vzorec přijít, zatím ponecháme otevřenou a v budoucnu se k ní vrátíme.

Věta 3.2. *Pro každé $n \in \mathbb{N}_0$ platí*

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right). \tag{3.3}$$

Důkaz. Pro $n = 0$ je na pravé straně dokazovaného vzorce (3.3) číslo

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1$$

a pro $n = 1$ číslo

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{6+2\sqrt{5}}{4} - \frac{6-2\sqrt{5}}{4}\right) = 1,$$

což souhlasí s hodnotami F_0 a F_1.

Předpokládejme, že dokazované tvrzení platí pro $n-1$ a $n-2$; ověříme, že pak platí pro n, čímž bude důkaz hotov.

Z definice Fibonacciho čísel a z indukčního předpokladu obdržíme

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right) + \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right)$$

Z prvního a třetího členu na pravé straně lze vytknout $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}$, z druhého a čtvrtého členu vytkneme $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}$. Tím získáme

$$\begin{aligned}
F_n &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}+1\right) - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}+1\right) = \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) = \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{6+2\sqrt{5}}{4}\right) - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{6-2\sqrt{5}}{4}\right) = \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right),
\end{aligned}$$

což jsme chtěli dokázat. □

Poznámka 3.3. Vzorec (3.3) není s ohledem na odmocniny, které v něm vystupují, příliš vhodný pro praktické výpočty. Přesto se jedná o důležitý výsledek. Číslo $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ je v absolutní hodnotě menší než 1. Sčítanec $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$ ve vzorci (3.3) tedy představuje geometrickou posloupnost, která velmi rychle konverguje k nule. Fibonacciho čísla lze proto velmi dobře aproximovat vztahem

$$F_n \doteq \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}.$$

Fibonacciho posloupnost tedy roste přibližně stejně rychle jako geometrická posloupnost s kvocientem $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Tuto skutečnost též vyjadřuje vztah

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2},$$

který lze dokázat s využitím vzorce (3.3).