Generující funkce

Antonín Slavík
Matematicko-fyzikální fakulta UK

V předchozích přednáškách jsme se setkali s úlohami vedoucími na rekurentní rovnice. Pomocí rekurentního vztahu lze počítat členy posloupnosti jeden po druhém, je však výhodnější mít k dispozici explicitní vzorec pro n-tý člen posloupnosti. V řadě úloh (hanojské věže, úloha o zajatcích) je možné takový vzorec uhodnout a poté dokázat matematickou indukcí, jindy to může být obtížné. Příkladem je Fibonacciho posloupnost, pro kterou jsme sice dokázali platnost vzorce pro n-tý člen, ale nevysvětlili jsme, jak na něj přijít.

V této přednášce si ukážeme metodu generujících funkcí, která propojuje kombinatoriku s matematickou analýzou a je (kromě jiného) velmi užitečným nástrojem pro řešení rekurentních rovnic.

1 Mocninné řady a generující funkce

V matematické analýze se studují mocninné řady, tj. řady ve tvaru $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$, kde a_n jsou reálné nebo komplexní koeficienty, reálné nebo komplexní číslo z_0 se nazývá střed mocninné řady a z je reálná nebo komplexní proměnná. Dále se omezíme pouze na řady se středem v nule, tj. $z_0 = 0$. Jedním z nejjednodušších příkladů je geometrická řada

$$1 + z + z^2 + z^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} z^n,$$

která v případě $|z| < 1$ konverguje k součtu $\frac{1}{1-z}$. Obráceně můžeme říct, že zlomek $\frac{1}{1-z}$ lze rozvinout do geometrické řady. Tento poznatek zobecňuje následující věta, kterou budeme často používat.

Věta 1.1. *Pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí*

$$\frac{1}{(1-z)^k} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k-1} z^n, \quad |z| < 1.$$

Důkaz. Větu dokážeme indukcí podle k. Pro $k = 1$ tvrzení platí, neboť $\binom{n+k-1}{k-1} = \binom{n}{0} = 1$ a věta se redukuje na vzorec pro součet geometrické řady. Předpokládejme, že tvrzení platí pro jisté číslo $k \in \mathbb{N}$, tj.

$$\frac{1}{(1-z)^k} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k-1} z^n.$$

Zderivujeme obě strany podle proměnné z a využijeme toho, že mocninné řady lze derivovat člen po členu:

$$\frac{k}{(1-z)^{k+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \binom{n+k-1}{k-1} n z^{n-1}$$

(dolní mez pro n v sumě na pravé straně je nyní 1, neboť konstantní nultý člen derivováním vypadl). Rovnici vydělíme číslem k, rozepíšeme kombinační číslo a upravíme:

$$\frac{1}{(1-z)^{k+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+k-1)\cdots(n+1)}{(k-1)!} \frac{n}{k} z^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} z^n$$

Tím jsme dokázali, že tvrzení platí pro číslo $k+1$, a důkaz indukcí je hotov. $\square$

Nyní zavedeme klíčový pojem této kapitoly.

Definice 1.2. Nechť je dána reálná nebo komplexní posloupnost $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$. Pak mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ se nazývá generující funkcí zadané posloupnosti.

Zatím není jasné, k čemu jsou generující funkce užitečné. Jde o jakýsi formální proces, kdy ze zadané posloupnosti vyrobíme mocninnou řadu. V tuto chvíli prosíme čtenáře o trpělivost; použití generujících funkcí k řešení rekurentních rovnic si ukážeme ve třetím oddíle tohoto textu.

Poznámka 1.3. V definici generující funkce se nepředpokládá nic o konvergenci příslušné mocninné řady; může se stát, že konverguje pouze pro $z = 0$. Místo „generující funkce“ se někdy používá počeštěný termín „vytvořující funkce“.

Následující tabulka ukazuje několik příkladů posloupností a jejich generujících funkcí. V prvních dvou příkladech příslušná mocninná řada obsahuje pouze jednoho nenulového sčítance. V dalších dvou příkladech se jedná o geometrickou řadu, v posledním řádku používáme k nalezení součtu větu 1.1 pro $k = 2$.

$\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$	$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$
$(1, 0, 0, 0, \ldots)$	1
$(\underbrace{0, \ldots, 0}_{m\text{-krát}}, 1, 0, \ldots)$	z^m
$(1, 1, 1, 1, \ldots)$	$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$
$(1, 2, 4, 8, \ldots)$	$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^n = \frac{1}{1-2z}$
$(1, 2, 3, 4, \ldots)$	$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) z^n = \frac{1}{(1-z)^2}$

2 Operace s posloupnostmi a jejich generujícími funkcemi

Jestliže posloupnost $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ má generující funkci $A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ a posloupnost $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ má generující funkci $B(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$, pak součet obou posloupností $\{a_n + b_n\}_{n=0}^{\infty}$ má generující funkci

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n = A(z) + B(z).$$

Dále pro každé reálné nebo komplexní číslo c platí, že generující funkce posloupnosti $\{c a_n\}_{n=0}^{\infty}$ je

$$\sum_{n=0}^{\infty} c a_n z^n = c \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = cA(z).$$

Zkusme ještě zjistit, co se stane s generující funkcí, jestliže členy posloupnosti posuneme o jistý počet pozic doprava nebo doleva.

Mějme libovolné $m \in \mathbb{N}$ a uvažujme posloupnost

$$(\underbrace{0, \ldots, 0}_{m\text{-krát}}, a_0, a_1, a_2, \ldots),$$

kterou označíme $\{a_{n-m}\}_{n=0}^{\infty}$ (tím jsme vlastně dodefinovali $a_{-1} = \cdots = a_{-m} = 0$). Generující funkce této posloupnosti je

$$a_0 z^m + a_1 z^{m+1} + a_2 z^{m+2} + \cdots = z^m (a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots) = z^m A(z).$$

Vidíme, že při posunu posloupnosti o m pozic doprava musíme generující funkci vynásobit z^m.

Pro zajímavost se ještě podívejme, co se děje při posouvání posloupnosti doleva (i když to v dalším výkladu nebudeme potřebovat): Posloupnost, která vznikne posunem o m pozic doleva (přičemž prvních m členů zmizí) je

$$\{a_{n+m}\}_{n=0}^{\infty} = (a_m, a_{m+1}, a_{m+2}, \dots)$$

a má generující funkci

$$\begin{aligned} a_m + a_{m+1}z + a_{m+2}z^2 + \cdots &= \frac{1}{z^m}\left(a_m z^m + a_{m+1}z^{m+1} + a_{m+2}z^{m+2} + \cdots\right) = \\ &= \frac{1}{z^m}\left(A(z) - a_0 - a_1 z - \cdots - a_{m-1}z^{m-1}\right) \end{aligned}$$

(první a druhá rovnost platí pro $z \neq 0$, jinak je hodnota generující funkce a_m). Vidíme, že při posunu posloupnosti o m pozic doleva dělíme generující funkci z^m, ještě předtím však odečítáme korekční členy odpovídající tomu, že jsme během posunu eliminovali prvních m členů posloupnosti.

3 Příklady

Příklad 3.1. Najděte vzorec pro n-tý člen posloupnosti zadané počátečními členy $F_0 = 1$, $F_1 = 1$ a rekurentním vzorcem $F_n = F_{n-2} + F_{n-1}$, $n \geq 2$ (Fibonacciho čísla).

Pokusíme se nejprve najít generující funkci $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n z^n$, tu pak rozvineme do mocninné řady a podíváme se na koeficient u z^n, čímž získáme hledaný vzorec pro F_n.

Platí

$$\begin{aligned} \{F_n\}_{n=0}^{\infty} &= (1, 1, F_0 + F_1, F_1 + F_2, \dots) = (0, 0, F_0, F_1, \dots) + (0, 1, F_1, F_2, \dots) + (1, 0, 0, 0, \dots) = \\ &= (0, 0, F_0, F_1, \dots) + (0, F_0, F_1, F_2, \dots) + (1, 0, 0, 0, \dots) = \{F_{n-2}\}_{n=0}^{\infty} + \{F_{n-1}\}_{n=0}^{\infty} + (1, 0, 0, 0, \dots). \end{aligned}$$

Pravou stranu jsme rozložili na posloupnosti, jejichž generující funkce umíme vyjádřit: $\{F_{n-2}\}_{n=0}^{\infty}$ má generující funkci $z^2F(z)$, $\{F_{n-1}\}_{n=0}^{\infty}$ má generující funkci $zF(z)$ a $(1, 0, 0, 0, \dots)$ má generující funkci 1. Přechodem od posloupností k jejich generujícím funkcím tedy dostáváme rovnici

$$F(z) = z^2F(z) + zF(z) + 1,$$

ze které vypočteme $F(z)$:

$$\begin{aligned} F(z)(1 - z - z^2) &= 1 \\ F(z) &= \frac{1}{1 - z - z^2} = \frac{-1}{z^2 + z - 1} \end{aligned}$$

Vidíme, že generující funkce posloupnosti $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$ je racionální funkce. Abychom ji dokázali rozvinout do mocninné řady, rozložíme ji nejprve na parciální zlomky. Použijeme standardní algoritmus z 1. ročníku matematické analýzy: Polynom $z^2 + z - 1$ ve jmenovateli má kořeny

$$z_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2},$$

platí tedy

$$z^2 + z - 1 = (z - z_1)(z - z_2)$$

a rozklad F na parciální zlomky hledáme ve tvaru

$$\frac{-1}{z^2 + z - 1} = \frac{a}{z - z_1} + \frac{b}{z - z_2}.$$

(Hodnoty z_1, z_2 známe, ale pro přehlednost je nevypisujeme.) Vynásobíme-li předchozí rovnost výrazem $(z - z_1)(z - z_2)$, obdržíme

$$-1 = a(z - z_2) + b(z - z_1) = (a + b)z - az_2 - bz_1.$$

Porovnáním koeficientů u lineárního a absolutního členu získáme soustavu rovnic

$$a + b = 0, \quad az_2 + bz_1 = 1$$

pro neznámé a, b. Z první rovnice plyne $b = -a$, dosazení do druhé rovnice dá $a(z_2 - z_1) = 1$, čili

$$a = \frac{1}{z_2 - z_1} = \frac{1}{\frac{-1-\sqrt{5}}{2} - \frac{-1+\sqrt{5}}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{5}}, \quad b = -a = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Tím jsme získali rozklad

$$F(z) = -\frac{1}{\sqrt{5}}\frac{1}{z - z_1} + \frac{1}{\sqrt{5}}\frac{1}{z - z_2}.$$

Vytknutím hodnot $-z_1$, resp. $-z_2$ ve jmenovatelích převedeme parciální zlomky do tvaru $\frac{1}{1-y}$, který pak rozvineme do geometrické řady:

$$F(z) = \frac{1}{\sqrt{5}z_1}\frac{1}{1 - z/z_1} - \frac{1}{\sqrt{5}z_2}\frac{1}{1 - z/z_2} = \frac{1}{\sqrt{5}z_1}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{z_1}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}z_2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{z_2}\right)^n =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} z^n \left(\frac{1}{\sqrt{5}z_1^{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{5}z_2^{n+1}}\right)$$

Koeficient u z^n v generující funkci představuje hledaný vzorec pro F_n. Můžeme jej ještě zjednodušit tím, že využijeme rovnosti $z_1 z_2 = -1$, která plyne z Viétových vztahů:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}z_1^{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{5}z_2^{n+1}} = \frac{(-z_2)^{n+1}}{\sqrt{5}} - \frac{(-z_1)^{n+1}}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$$

Tím jsme dospěli ke vzorci, který známe z kapitoly věnované Fibonacciho číslům.

Zobecníme-li postup z předchozího příkladu, získáme algoritmus pro řešení rekurentních rovnic metodou generujících funkcí:

1. Pomocí rekurentní rovnice pro $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ najdi rovnici pro generující funkci $A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.
2. Vypočítej z této rovnice $A(z)$.
3. Rozviň $A(z)$ do mocninné řady, vzorec pro a_n je dán koeficientem u z^n.

Celý postup ještě jednou ilustrujeme na dalším příkladu.

Příklad 3.2. Najděte vzorec pro n-tý člen posloupnosti zadané počátečními členy $a_0 = 3$, $a_1 = 4$ a rekurentním vzorcem $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}$, $n \geq 2$.

Najdeme rovnici pro generující funkci $A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ zadané posloupnosti. Platí

$$\{a_n\}_{n=0}^{\infty} = (3, 4, 4a_1 - 4a_0, 4a_2 - 4a_1, \ldots) = 4(0, 0, a_1, a_2, \ldots) - 4(0, 0, a_0, a_1, \ldots) + (3, 4, 0, 0, \ldots) =$$
$$= 4(0, a_0, a_1, a_2, \ldots) - 4(0, 0, a_0, a_1, \ldots) + (3, -8, 0, 0, \ldots) = 4\{a_{n-1}\}_{n=0}^{\infty} - 4\{a_{n-2}\}_{n=0}^{\infty} + (3, -8, 0, 0, \ldots).$$

Pravou stranu jsme rozložili na posloupnosti, jejichž generující funkce umíme vyjádřit: $\{a_{n-1}\}_{n=0}^{\infty}$ má generující funkci $zA(z)$, $\{a_{n-2}\}_{n=0}^{\infty}$ má generující funkci $z^2 A(z)$ a $(3, -8, 0, 0, \ldots)$ má generující funkci $3 - 8z$. Přechodem od posloupností k jejich generujícím funkcím tedy dostáváme rovnici

$$A(z) = 4zA(z) - 4z^2 A(z) + 3 - 8z,$$

ze které vypočteme $A(z)$:

$$A(z)(1-4z+4z^2) = 3-8z$$
$$A(z) = \frac{-8z+3}{4z^2-4z+1}$$

Generující funkce posloupnosti $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ je racionální funkce. Abychom ji dokázali rozvinout do mocninné řady, rozložíme ji na parciální zlomky. Polynom $4z^2-4z+1$ ve jmenovateli má dvojnásobný kořen $z=\frac{1}{2}$, platí tedy

$$4z^2-4z+1 = 4\left(z-\frac{1}{2}\right)^2 = (2z-1)^2.$$

Rozklad na parciální zlomky bude mít tvar

$$A(z) = \frac{a}{2z-1} + \frac{b}{(2z-1)^2}.$$

K nalezení konstant a, b bychom mohli použít standardní algoritmus jako v předchozím příkladu, můžeme se mu ale vyhnout následujícím trikem, kdy v čitateli přičteme a odečteme jedničku:

$$A(z) = \frac{-8z+3}{(2z-1)^2} = \frac{-8z+4}{(2z-1)^2} - \frac{1}{(2z-1)^2} = \frac{-4(2z-1)}{(2z-1)^2} - \frac{1}{(2z-1)^2} = \frac{4}{1-2z} - \frac{1}{(1-2z)^2}$$

Parciální zlomky rozvineme do mocninných řad pomocí vzorců $\frac{1}{1-y} = \sum_{n=0}^{\infty} y^n$ a $\frac{1}{(1-y)^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)y^n$ (viz větu 1.1 pro $k=2$):

$$A(z) = 4\sum_{n=0}^{\infty}(2z)^n - \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(2z)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(4-(n+1))2^n z^n = \sum_{n=0}^{\infty}(3-n)2^n z^n$$

Odtud dostáváme výsledek

$$a_n = (3-n)2^n.$$

Poznámka 3.3. Pozornému čtenáři jistě neuniklo, že jsme v tomto oddíle zacházeli poněkud benevolentně s mocninnými řadami a nestarali se o to, pro jaká z konvergují. Informaci o konvergenci by bylo možné doplnit, není to však nutné. Metoda generujících funkcí totiž vždy vede ke správným výsledkům bez ohledu na obory konvergence použitých řad. Nedůvěřivý čtenář může řešení rekurentních rovnic nalezená pomocí generujících funkcí vždy zkontrolovat matematickou indukcí.