Kombinatorické identity

Antonín Slavík
Matematicko-fyzikální fakulta UK

Jako kombinatorické identity se označují nejrůznější vztahy obsahující kombinační čísla. Připomeňme, že pro všechna $n, k \in \mathbb{N}_0$ splňující $k \leq n$ platí

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \tag{1}$$

Tuto definici nyní zobecníme a budeme uvažovat i případ $k > n$, kdy definujeme $\binom{n}{k} = 0$. Tím je zachován kombinatorický význam kombinačního čísla: Je-li $k > n$, pak počet způsobů, jak z n-prvkové množiny vybrat neuspořádanou k-tici prvků bez opakování (neboli k-prvkovou podmnožinu), je 0. Dále si můžeme všimnout, že pro $k > n$ stále platí první rovnost v (1), neboť v tomto případě se mezi čísly v čitateli objeví nula. Druhá rovnost v (1) ovšem neplatí, neboť faktoriál záporného čísla $n-k$ není definován. To je nutné mít na paměti při dokazování kombinatorických identit se zobecněnými kombinačními čísly a vyhnout se používání vzorce $\frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Ze zobecněných kombinačních čísel $\binom{n}{k}$, kde $n, k \in \mathbb{N}_0$, můžeme sestavit schéma ve tvaru nekonečné matice, jejíž část ukazuje následující tabulka:

$n\backslash k$	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
0	1	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0
2	1	2	1	0	0
3	1	3	3	1	0
4	1	4	6	4	1

Čísla pod diagonálou a na ní odpovídají Pascalovu trojúhelníku, zatímco vpravo od diagonály jsou nuly.

V následující větě jsou zformulovány dvě základní vlastnosti kombinačních čísel; první identita platí pro všechna zobecněná kombinační čísla, zatímco druhá dává smysl jen pro klasická kombinační čísla z Pascalova trojúhelníku.

Věta 1. *Pro $n, k \in \mathbb{N}_0$ platí následující tvrzení:*

- $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$.
- *Pokud $k \leq n$, pak $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.*

Důkaz. Obě tvrzení lze dokázat výpočtem: Platí

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} + \frac{n(n-1)\cdots(n-k)}{(k+1)!} =$$

$$= \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\left(1 + \frac{n-k}{k+1}\right) = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\,\frac{n+1}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

a pokud $k \leq n$, pak

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{n-k}.$$

Elegantněji lze postupovat s využitím kombinatorické interpretace: $\binom{n+1}{k+1}$ je počet $(k+1)$-prvkových podmnožin množiny $\{1,\dots,n+1\}$. Přitom počet $(k+1)$-prvkových podmnožin, které obsahují prvek $n+1$, je $\binom{n}{k}$, a podmnožin, které neobsahují $n+1$, je $\binom{n}{k+1}$. Tím je zdůvodněna platnost prvního tvrzení. Druhé tvrzení můžeme kombinatoricky interpretovat tak, že počet k-prvkových podmnožin množiny $\{1,\dots,n\}$ je stejný jako počet jejích $n-k$-prvkových podmnožin. To je zřejmé, neboť výběr k prvků je ekvivalentní s vyškrtáním $n-k$ prvků. □

V přednášce o permutacích s omezujícími podmínkami jsme již používali absorpční identitu, kterou zde pro úplnost připomeneme a všimneme si, že zůstává v platnosti pro zobecněná kombinační čísla.

Věta 2 (absorpční identita)**.** *Pro všechna $n,k\in\mathbb{N}$ platí $\binom{n}{k}=\frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$.*

Důkaz. Platí

$$\binom{n}{k}=\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}=\frac{n}{k}\,\frac{(n-1)\cdots(n-k+1)}{(k-1)!}=\frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}.$$ □

Další věta je vzorec pro součet konečného počtu kombinačních čísel ležících pod sebou v jednom sloupci.

Věta 3 (součet ve sloupci)**.** *Pro všechna $n,k\in\mathbb{N}_0$ platí*

$$\binom{k}{k}+\binom{k+1}{k}+\binom{k+2}{k}+\cdots+\binom{n}{k}=\binom{n+1}{k+1},$$
$$\binom{0}{k}+\binom{1}{k}+\binom{2}{k}+\cdots+\binom{n}{k}=\binom{n+1}{k+1}.$$

Důkaz. Oba vzorce jsou ekvivalentní – na levé straně druhého vzorce jsou navíc kombinační čísla nacházející se nad diagonálou, která jsou nulová. Stačí tedy dokázat první vzorec.

Uvědomíme si, že $\binom{k}{k}=1=\binom{k+1}{k+1}$, a poté opakovaně používáme první tvrzení z věty 1:

$$\begin{aligned}\binom{k}{k}+\binom{k+1}{k}+\binom{k+2}{k}+\cdots+\binom{n}{k}&=\binom{k+1}{k+1}+\binom{k+1}{k}+\binom{k+2}{k}+\cdots+\binom{n}{k}=\\&=\binom{k+2}{k+1}+\binom{k+2}{k}+\binom{k+3}{k}+\cdots+\binom{n}{k}=\\&=\binom{k+3}{k+1}+\binom{k+3}{k}+\binom{k+4}{k}+\cdots+\binom{n}{k}=\\&\dots\\&=\binom{n}{k+1}+\binom{n}{k}=\binom{n+1}{k+1}.\end{aligned}$$

Ukažme si ještě kombinatorický důkaz věty: $\binom{n+1}{k+1}$ je počet $(k+1)$-prvkových podmnožin množiny $\{0,\dots,n\}$. Přitom $(k+1)$-prvkových podmnožin, jejichž největší prvek je $i\in\{k,\dots,n\}$, je $\binom{i}{k}$. Nasčítáním těchto kombinačních čísel přes $i\in\{k,\dots,n\}$ musíme dostat celkový počet $\binom{n+1}{k+1}$, což dává první vztah ze znění věty. □

Použití věty 3 ilustruje následující schéma, kde součtem žlutě podbarvených kombinačních čísel je zeleně podbarvené kombinační číslo nacházející se o jeden řádek níže a o jeden sloupec vpravo od posledního sčítance.

$n\backslash k$	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
0	1	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0
2	1	2	1	0	0
3	1	3	3	1	0
4	1	4	6	4	1

Následující identita udává součet kombinačních čísel ležících na úsečce rovnoběžné s diagonálou.

Věta 4 (součet rovnoběžně s diagonálou)**.** *Pro všechna* $n, k \in \mathbb{N}_0$ *platí*

$$\binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} + \cdots + \binom{n+k}{k} = \binom{n+k+1}{k}.$$

Důkaz. Použitím druhého tvrzení z věty 1 a následně věty 3 obdržíme

$$\binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} + \cdots + \binom{n+k}{k} =$$
$$= \binom{n}{n} + \binom{n+1}{n} + \binom{n+2}{n} + \cdots + \binom{n+k}{n} = \binom{n+k+1}{n+1} = \binom{n+k+1}{k}.$$

Můžeme postupovat i kombinatoricky: $\binom{n+k+1}{k} = \binom{n+k+1}{n+1}$ je počet rozdělení k nerozlišitelných předmětů do $n+2$ rozlišitelných přihrádek (viz kapitolu *Rozmisťovací úlohy*, oddíl 1.2a). Každé rozdělení vznikne tak, že jistých i předmětů dáme do prvních $n+1$ přihrádek, což lze provést $\binom{n+i}{n} = \binom{n+i}{i}$ způsoby, a zbývající předměty uložíme do poslední přihrádky. Nasčítáním čísel $\binom{n+i}{i}$ přes všechna $i \in \{0, \ldots, k\}$ musíme dostat celkový počet $\binom{n+k+1}{k}$, což dává dokazované tvrzení. □

Použití věty 4 ilustruje následující schéma, kde součtem žlutě podbarvených kombinačních čísel je zeleně podbarvené kombinační číslo nacházející se těsně pod posledním sčítancem.

$n\backslash k$	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
0	1	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0
2	1	2	1	0	0
3	1	3	3	1	0
4	1	4	6	4	1

Zkusme dále hledat součty kombinačních čísel ležících na úsečkách kolmých k diagonále. V následujícím schématu tedy sčítáme vždy stejně podbarvená čísla.

$n\backslash k$	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
0	1	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0
2	1	2	1	0	0
3	1	3	3	1	0
4	1	4	6	4	1

Dostáváme postupně součty 1, 1, 2, 3, 5, atd. – zdá se, že jde o Fibonacciho čísla!

Věta 5 (součet kolmo k diagonále)**.** *Pro všechna* $n \in \mathbb{N}_0$ *platí*

$$\binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \cdots + \binom{0}{n} = F_n.$$

Důkaz. Víme, že F_n udává počet způsobů, jak vyplnit obdélník o rozměrech $1 \times n$ pomocí monomin a domin (viz kapitolu *Fibonacciho čísla*). Přitom počet dláždění obsahujících právě k domin, a tedy $n-2k$ monomin, je roven $\binom{n-k}{k}$, neboť z $n-k$ po sobě jdoucích dlaždic vybíráme pozice, kde budou domina. Nasčítáním kombinačních čísel $\binom{n-k}{k}$ přes všechny možné hodnoty $k \in \{0, \ldots, n\}$ musíme získat celkový počet dláždění F_n, čímž je věta dokázána.[1] □

[1] Pokud $k > n-k$, pak žádné dláždění s k dominy neexistuje (počet domin by převýšil celkový počet dlaždic). V takové situaci je ovšem zobecněné kombinační číslo $\binom{n-k}{k}$ nulové, takže můžeme bez obav sčítat přes všechna $k \in \{0, \ldots, n\}$.

Existuje mnoho identit, v nichž vystupují nejen součty, ale i součiny kombinačních čísel. Nejdůležitější z nich je Vandermondova identita.[2]

Věta 6 (Vandermondova identita)**.** *Pro všechna $p, q, n \in \mathbb{N}_0$ platí*

$$\sum_{l=0}^{n} \binom{p}{l}\binom{q}{n-l} = \binom{p+q}{n}.$$

Důkaz. Mějme $p+q$ osob, z toho p mužů a q žen. Pak $\binom{p+q}{n}$ je počet způsobů, jak vybrat n osob. Přitom počet výběrů s právě l muži, a tedy $n-l$ ženami, je $\binom{p}{l}\binom{q}{n-l}$. Nasčítáním těchto čísel přes všechna možná $l \in \{0, \dots, n\}$ musíme dostat celkový počet možností $\binom{p+q}{n}$. □

Všimněme si, že znění věty 6 je elegantní díky tomu, že pracujeme se zobecněnými kombinačními čísly – jinak bychom museli zaručit, že jsou splněny podmínky $l \leq p$ a $n-l \leq q$.

Vandermondova identita se často používá v důkazech jiných identit. Snadno lze získat např. hodnotu součtu druhých mocnin kombinačních čísel ležících v jednom řádku.

Důsledek 7. *Pro každé $n \in \mathbb{N}_0$ platí*

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \dots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}.$$

Důkaz. Použijeme Vandermondovu identitu s $p = q = n$ a druhé tvrzení věty 1:

$$\binom{2n}{n} = \sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l}\binom{n}{n-l} = \sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l}\binom{n}{l} = \sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l}^2.$$ □

Jaký je součet prvních mocnin kombinačních čísel ležících v jednom řádku? K výsledku lze dospět např. pomocí binomické věty, která říká, že pro každé $n \in \mathbb{N}_0$ a libovolná reálná nebo komplexní čísla a, b platí

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Věta 8. *Pro každé $n \in \mathbb{N}_0$ platí*

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n.$$

Důkaz. Tvrzení plyne z binomické věty po dosazení $a = b = 1$.

Vztah lze zdůvodnit i kombinatoricky: $\binom{n}{k}$ je počet k-prvkových podmnožin n-prvkové množiny. Na levé straně tedy sčítáme počet 0-prvkových, 1-prvkových, …, n-prvkových podmnožin n-prvkové množiny. Tím získáme celkový počet všech jejích podmnožin, který je roven 2^n. Podmnožinu lze totiž vybrat tak, že u každého z n prvků rozhodneme, zda jej do podmnožiny zařadíme, nebo nezařadíme. □

Věta 9. *Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí*

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \dots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0.$$

[2] Historicky správnější název je Chuova-Vandermondova identita, neboť čínský matematik Chu Shih-chieh ji objevil již roku 1303, zatímco francouzský matematik Alexandre-Théophile Vandermonde až roku 1772.

Důkaz. Tvrzení plyne z binomické věty po dosazení $a = 1$, $b = -1$.

Vztah lze zdůvodnit i kombinatoricky, pokud jej přepíšeme v následující podobě:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \cdots = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \cdots$$

Na levé straně je počet podmnožin množiny $\{1, \ldots, n\}$ se sudým počtem prvků, na pravé straně počet podmnožin s lichým počtem prvků. Proč se tyto počty rovnají? Uvažujme následující operaci: Dostaneme-li podmnožinu neobsahující jedničku, pak do ní jedničku přidáme. Dostaneme-li podmnožinu obsahující jedničku, pak z ní jedničku odebereme. Tato operace vždy změní počet prvků o 1 a jde o bijekci mezi množinami se sudým počtem prvků a množinami s lichým počtem prvků. □

Z vět 8 a 9 dostáváme následující důsledek.

Důsledek 10. *Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí*

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \cdots = 2^{n-1}, \qquad \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \cdots = 2^{n-1}.$$

Následující věta říká, co se stane, když v součtech na levé straně budeme střídat znaménka. Důkaz je pěknou aplikací binomické věty v komplexním oboru.

Věta 11. *Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí*

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - \cdots = (\sqrt{2})^n \cos\frac{n\pi}{4}, \qquad \binom{n}{1} - \binom{n}{3} + \binom{n}{5} - \cdots = (\sqrt{2})^n \sin\frac{n\pi}{4}.$$

Důkaz. Do binomické věty dosadíme $a = 1$, $b = \mathrm{i}$:

$$\begin{aligned}(1+\mathrm{i})^n &= \binom{n}{0} + \mathrm{i}\binom{n}{1} + \mathrm{i}^2\binom{n}{2} + \mathrm{i}^3\binom{n}{3} + \mathrm{i}^4\binom{n}{4} + \cdots \\ &= \binom{n}{0} + \mathrm{i}\binom{n}{1} - \binom{n}{2} - \mathrm{i}\binom{n}{3} + \binom{n}{4} + \cdots\end{aligned}$$

Hodnotu $(1+\mathrm{i})^n$ můžeme počítat i jiným způsobem: Převedeme $1+\mathrm{i}$ do goniometrického tvaru a použijeme Moivreovu větu:

$$(1+\mathrm{i})^n = \left(\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)\right)^n = (\sqrt{2})^n\left(\cos\frac{n\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{n\pi}{4}\right)$$

Porovnáním reálných a imaginárních částí v předchozích dvou vyjádřeních $(1+\mathrm{i})^n$ dostaneme tvrzení věty. □

Na tomto místě výklad o kombinatorických identitách ukončíme. Existují jich stovky a bylo by možné ještě dlouho pokračovat. Ve druhé polovině 20. století se objevily algoritmy vhodné pro počítačové odvozování a dokazování identit, jako je např. Gosperův algoritmus (1978) nebo Wilfův-Zeilbergerův algoritmus (1990).

Navíc existují metody, jak dokázat, že některé součty, jako např. $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^3$, nelze vyjádřit v uzavřeném tvaru (zhruba řečeno, pomocí elementárních funkcí a bez použití sumy). Jde o podobnou situaci jako v matematické analýze, kde jsou známy spojité funkce, jejichž primitivní funkce nelze vyjádřit pomocí elementárních funkcí.

O těchto a dalších algoritmech a metodách se lze dočíst například v knize s vtipným názvem A=B, která je volně k dispozici na internetu (`https://www.math.upenn.edu/~wilf/AeqB.html`).

Přestože lze nyní dokazování kombinatorických identit svěřit v mnoha případech počítači, znalost identit uvedených v této kapitole patří k základnímu matematickému vzdělání. Obzvlášť cenné jsou kombinatorické důkazy, které na rozdíl od formálního výpočtu umožňují lépe porozumět tomu, proč vlastně identita platí.