Lineární homogenní rekurentní rovnice s konstantními koeficienty

Antonín Slavík
Matematicko-fyzikální fakulta UK

V předchozí přednášce jsme se seznámili s řešením rekurentních rovnic metodou generujících funkcí. Jde o elegantní metodu, její použití ale může být poněkud pracné. V tomto textu pomocí generujících funkcí odvodíme mnohem jednodušší algoritmus použitelný pro poměrně širokou třídu rekurentních rovnic.

1 Pomocné tvrzení o polynomech

Začneme tvrzením z algebry, které zdánlivě nijak nesouvisí s rekurentními rovnicemi. Využijeme je v dalším oddíle, je však zajímavé i samo o sobě.

Máme-li libovolný polynom, jak se změní jeho kořeny, pokud koeficienty polynomu napíšeme v obráceném pořadí? Následující věta říká, že kořeny nového polynomu jsou převrácenými hodnotami kořenů původního polynomu. Pro jednoduchost předpokládáme, že původní polynom nemá nulový kořen (tomu odpovídá požadavek $\alpha_m \neq 0$).

Věta 1.1. *Mějme polynomy*

$$Q(z) = \alpha_0 z^m + \alpha_1 z^{m-1} + \cdots + \alpha_m,$$
$$Q^*(z) = \alpha_m z^m + \alpha_{m-1} z^{m-1} + \cdots + \alpha_0,$$

kde $\alpha_0, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{C}$ *a* $\alpha_0,\ \alpha_m \neq 0$.

Pokud má Q kořeny (ne nutně různé) $z_1, \ldots, z_m$, pak Q^* má kořeny $\frac{1}{z_1}, \ldots, \frac{1}{z_m}$ (každý kořen je uveden tolikrát, kolik je jeho násobnost).

Důkaz. Rozklad polynomu Q na kořenové činitele je $Q(z) = \alpha_0(z - z_1)\cdots(z - z_m)$. Pro $z \neq 0$ platí

$$Q^*(z) = z^m(\alpha_m + \alpha_{m-1}/z + \cdots + \alpha_0/z^m) = z^m Q(1/z) = z^m \alpha_0 (1/z - z_1)\cdots(1/z - z_m) =$$
$$= \alpha_0(1 - z z_1)\cdots(1 - z z_m) = \alpha_0 z_1 \cdots z_m (1/z_1 - z)\cdots(1/z_m - z).$$

Získaný vztah $Q^*(z) = \alpha_0 z_1 \cdots z_m (1/z_1 - z)\cdots(1/z_m - z)$ ovšem platí i v případě $z = 0$, kdy se obě strany rovnají α_0. Dostali jsme tedy rozklad Q^* na kořenové činitele, ze kterého vidíme, že Q^* má kořeny $\frac{1}{z_1}, \ldots, \frac{1}{z_m}$. □

Poznámka 1.2. Co se stane v případě, kdy Q má nulový kořen? Čtenář si může zkusit dokázat následující tvrzení (nebudeme je ovšem potřebovat):[1] Pokud má Q nulový kořen násobnosti l a další nenulové (ne nutně různé) kořeny $z_1, \ldots, z_k$, pak Q^* je polynom stupně $m - l = k$, jehož kořeny jsou $\frac{1}{z_1}, \ldots, \frac{1}{z_k}$.

[1] Stále bez újmy na obecnosti předpokládáme, že $\alpha_0 \neq 0$ (v opačném případě je možné člen s nulovým koeficientem vynechat).

2 Lineární rekurentní rovnice

V minulé přednášce jsme pomocí metody generujících funkcí vyřešili rekurentní rovnice $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ a $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}$. V obou případech byl n-tý člen lineární kombinací předchozích dvou členů. Obecněji můžeme uvažovat případ, kdy n-tý člen je lineární kombinací předchozích k členů:

$$a_n = \alpha_1 a_{n-1} + \cdots + \alpha_k a_{n-k}, \quad n \geq k. \tag{2.1}$$

Aby byla posloupnost $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ určena jednoznačně, je třeba zadat ještě počáteční členy $a_0, \ldots, a_{k-1}$. Koeficienty $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ i počáteční členy mohou být reálná nebo komplexní čísla. Bez újmy na obecnosti lze předpokládat $\alpha_k \neq 0$, jinak by bylo možné poslední sčítanec (a případné další nulové sčítance) v rovnici (2.1) vynechat.

Rovnice (2.1) se označuje jako lineární homogenní rekurentní rovnice s konstantními koeficienty. Slovo „lineární“ vyjadřuje skutečnost, že na pravé straně rovnice vystupuje lineární kombinace. Kromě rovnice (2.1) se studují i obecnější rovnice

$$a_n = \alpha_1 a_{n-1} + \cdots + \alpha_k a_{n-k} + b,$$

kterým se říká nehomogenní, a dále rovnice, kde koeficienty $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ nejsou konstanty, ale funkce proměnné n (terminologie je podobná jako u obyčejných diferenciálních rovnic).

Naším cílem je vyřešit rovnici (2.1), tj. najít explicitní vzorec pro n-tý člen posloupnosti $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$. Použijeme k tomu metodu generujících funkcí, označíme tedy $A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ a budeme postupovat podle „tříkrokového“ algoritmu z minulé přednášky.

Z informace o počátečních členech a z rekurentní rovnice (2.1) plyne

$$\begin{aligned} \{a_n\}_{n=0}^{\infty} &= (a_0, \ldots, a_{k-1}, \alpha_1 a_{k-1} + \cdots + \alpha_k a_0, \alpha_1 a_k + \cdots + \alpha_k a_1, \ldots) = \\ &= (a_0, \ldots, a_{k-1}, 0, \ldots) + \alpha_1(\underbrace{0, \ldots, 0}_{k\text{-krát}}, a_{k-1}, a_k, \ldots) + \cdots + \alpha_k(\underbrace{0, \ldots, 0}_{k\text{-krát}}, a_0, a_1, \ldots). \end{aligned}$$

Na pravé straně se snažíme získat posloupnosti, jejichž generující funkce umíme vyjádřit pomocí $A(z)$. Všimneme si, že druhý sčítanec se téměř shoduje s α_1-násobkem posloupnosti $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ posunuté o jednu pozici doprava, další sčítanec je téměř α_2-násobkem posloupnosti $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ posunuté o dvě pozice doprava, atd. Přičtením a odečtením vhodných konstant získáme

$$\{a_n\}_{n=0}^{\infty} = \alpha_1(0, a_0, a_1, \ldots) + \cdots + \alpha_k(\underbrace{0, \ldots, 0}_{k\text{-krát}}, a_0, a_1, \ldots) + (b_0, b_1, \ldots, b_{k-1}, 0, \ldots),$$

kde $b_0, b_1, \ldots, b_{k-1}$ jsou vhodná čísla (jejich hodnoty lze vypočítat, např. $b_0 = a_0$, $b_1 = a_1 - \alpha_1 a_0$, atd., ale nebudeme je potřebovat). Přechodem od posloupností k jejich generujícím funkcím obdržíme

$$A(z) = \alpha_1 z A(z) + \alpha_2 z^2 A(z) + \cdots + \alpha_k z^k A(z) + b_0 + b_1 z + \cdots + b_{k-1} z^{k-1}.$$

Úpravou pak získáme předpis pro generující funkci:

$$A(z) = \frac{b_0 + b_1 z + \cdots + b_{k-1} z^{k-1}}{1 - \alpha_1 z - \alpha_2 z^2 - \cdots - \alpha_k z^k}$$

V dalším kroku najdeme rozvoj generující funkce do mocninné řady. Protože se jedná o racionální funkci, postupujeme stejně jako v předchozí přednášce a rozložíme ji na parciální zlomky. Předpokládejme, že polynom ve jmenovateli má rozklad na kořenové činitele

$$1 - \alpha_1 z - \alpha_2 z^2 - \cdots - \alpha_k z^k = -\alpha_k (z - z_1)^{n_1} \cdots (z - z_l)^{n_l},$$

tj. $z_1, \ldots, z_l$ jsou navzájem různé kořeny s násobnostmi $n_1, \ldots, n_l$, kde $n_1 + \cdots + n_l = k$. Všimněme si, že všechny kořeny jsou nenulové, neboť hodnota polynomu na levé straně v nule je 1. Rozklad na parciální zlomky tedy bude mít tvar

$$\begin{aligned}A(z) &= \frac{c_{1,1}}{z-z_1} + \dots + \frac{c_{1,n_1}}{(z-z_1)^{n_1}} + \dots + \frac{c_{l,1}}{z-z_l} + \dots + \frac{c_{l,n_l}}{(z-z_l)^{n_l}} = \\ &= \frac{d_{1,1}}{1-z/z_1} + \dots + \frac{d_{1,n_1}}{(1-z/z_1)^{n_1}} + \dots + \frac{d_{l,1}}{1-z/z_l} + \dots + \frac{d_{l,n_l}}{(1-z/z_l)^{n_l}},\end{aligned}$$

kde $d_{i,j} = c_{i,j}/(-z_i)^j$. Koeficienty $c_{i,j}$ (a tím pádem i $d_{i,j}$) neznáme, ale nebudeme je potřebovat.

Pomocí vzorce $\frac{1}{(1-y)^k} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k-1} y^n$ z minulé přednášky rozvineme všechny zlomky do mocninných řad:

$$\begin{aligned}A(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} d_{1,1} \left(\frac{z}{z_1}\right)^n + \dots + \sum_{n=0}^{\infty} d_{1,n_1} \binom{n+n_1-1}{n_1-1} \left(\frac{z}{z_1}\right)^n + \dots + \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} d_{l,1} \left(\frac{z}{z_l}\right)^n + \dots + \sum_{n=0}^{\infty} d_{l,n_l} \binom{n+n_l-1}{n_l-1} \left(\frac{z}{z_l}\right)^n = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P_1(n) \left(\frac{z}{z_1}\right)^n + \dots + \sum_{n=0}^{\infty} P_l(n) \left(\frac{z}{z_l}\right)^n,\end{aligned}$$

kde jsme zavedli označení $P_i(n) = d_{i,1} + \dots + d_{i,n_i} \binom{n+n_i-1}{n_i-1}$ pro každé $i \in \{1, \dots, l\}$. Pokud se na kombinační číslo

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdots (n-k+1)}{k!}$$

díváme jako na funkci proměnné n, pak se jedná o polynom stupně k. Tedy pro každé $i \in \{1, \dots, l\}$ je $P_i(n)$ polynomem stupně nejvýše $n_i - 1$ (stupeň může být nižší, neboť koeficient d_{i,n_i} může být nulový).

Hledaný vzorec pro a_n získáme jako koeficient u z^n v $A(z)$, tedy

$$a_n = \frac{P_1(n)}{z_1^n} + \dots + \frac{P_l(n)}{z_l^n},$$

kde $z_1, \dots, z_l$ jsou kořeny polynomu $1 - \alpha_1 z - \alpha_2 z^2 - \dots - \alpha_k z^k$ s násobnostmi $n_1, \dots, n_l$ a pro každé $i \in \{1, \dots, l\}$ je P_i polynom stupně nejvýše $n_i - 1$.

Tento výsledek můžeme ještě zjednodušit, když si všimneme, že ve vzorci vystupují převrácené hodnoty kořenů $z_1, \dots, z_l$. Podle věty 1.1 představují tyto převrácené hodnoty kořeny polynomu, který má koeficienty zapsané v obráceném pořadí, tj. polynomu $z^k - \alpha_1 z^{k-1} - \alpha_2 z^{k-2} - \dots - \alpha_k$. Dokázali jsme tak následující větu.

Věta 2.1. *Každé řešení rovnice*

$$a_n = \alpha_1 a_{n-1} + \dots + \alpha_k a_{n-k}$$

má tvar

$$a_n = P_1(n) w_1^n + \dots + P_l(n) w_l^n, \tag{2.2}$$

kde $w_1, \dots, w_l$ jsou všechny kořeny polynomu

$$w^k - \alpha_1 w^{k-1} - \alpha_2 w^{k-2} - \dots - \alpha_k, \tag{2.3}$$

jejichž násobnosti jsou $n_1, \dots, n_l$, a pro každé $i \in \{1, \dots, l\}$ je P_i polynom stupně nejvýše $n_i - 1$.

3 Příklady

Na první pohled se může zdát, že věta 2.1 nedává dost informací k vyřešení rekurentní rovnice, neboť neznáme polynomy $P_1, \dots, P_l$. Ve skutečnosti je však dokážeme najít díky znalosti počátečních členů $a_0, \dots, a_{k-1}$.

Ukážeme si celý postup na příkladech.

Příklad 3.1. Najděte vzorec pro n-tý člen posloupnosti zadané počátečními členy $a_0 = 3$, $a_1 = 4$ a rekurentním vzorcem $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}$, $n \geq 2$.

Rekurentní rovnice říká, že každý člen závisí na předchozích dvou členech, tedy $k = 2$. Kořeny polynomu (2.3) získáme řešením rovnice

$$w^2 - 4w + 4 = 0.$$

Rovnici lze přepsat do tvaru $(w-2)^2 = 0$, ze kterého je zřejmé, že má dvojnásobný kořen 2, tj.

$$w_1 = 2, \quad n_1 = 2.$$

Polynom P_1 má stupeň nejvýše $n_1 - 1 = 1$, lze jej tedy vyjádřit ve tvaru $P_1(n) = bn + c$, kde b, c jsou zatím neznámé koeficienty. Podle vzorce (2.2) má obecné řešení zadané rekurentní rovnice tvar

$$a_n = (bn + c)2^n, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

K nalezení koeficientů b, c využijeme počáteční členy $a_0 = 3$, $a_1 = 4$. Pro $n = 0$ má tedy platit

$$3 = (b \cdot 0 + c)2^0 = c$$

a pro $n = 1$ dostáváme

$$4 = (b \cdot 1 + c)2^1 = 2(b + c).$$

Řešení této soustavy lineárních rovnic je $c = 3$, $b = -1$. Řešení rekurentní rovnice je tedy

$$a_n = (-n + 3)2^n.$$

To je stejný výsledek jako v přechozí přednášce, avšak odvozený jednodušším postupem (generující funkce jsou skryty v důkazu věty 2.1).

Příklad 3.2. Najděte vzorec pro n-tý člen posloupnosti zadané počátečními členy $a_0 = 2$, $a_1 = 6$, $a_2 = 0$ a rekurentním vzorcem $a_n = -2a_{n-1} + 4a_{n-2} + 8a_{n-3}$, $n \geq 3$.

Rekurentní rovnice říká, že každý člen závisí na předchozích třech členech, tedy $k = 3$. Kořeny polynomu (2.3) získáme řešením rovnice

$$w^3 + 2w^2 - 4w - 8 = 0.$$

Rovnici lze upravit následujícím způsobem:

$$\begin{aligned} w^2(w+2) - 4(w+2) &= 0 \\ (w+2)(w^2-4) &= 0 \\ (w+2)^2(w-2) &= 0 \end{aligned}$$

Vidíme, že polynom má dvojnásobný kořen -2 a jednoduchý kořen 2, tj.

$$w_1 = -2, \quad n_1 = 2, \quad w_2 = 2, \quad n_2 = 1.$$

Polynom P_1 má stupeň nejvýše $n_1 - 1 = 1$ a polynom P_2 má stupeň nejvýše $n_2 - 1 = 0$, tedy $P_1(n) = bn + c$, $P_2(n) = d$, kde b, c, d jsou zatím neznámé koeficienty. Podle vzorce (2.2) má obecné řešení zadané rekurentní rovnice tvar

$$a_n = (bn + c)(-2)^n + d2^n, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

K nalezení koeficientů b, c, d využijeme počáteční členy $a_0 = 2$, $a_1 = 6$, $a_2 = 0$. Pro $n = 0$, $n = 1$ a $n = 2$ dostáváme postupně rovnice $2 = c + d$, $6 = (b + c)(-2) + 2d$, $0 = (2b + c)4 + 4d$, neboli po úpravě

$$\begin{aligned} 2 &= c + d, \\ 3 &= d - b - c, \\ 0 &= 2b + c + d. \end{aligned}$$

Odečtením první rovnice od třetí získáme $b = -1$ a dosazením této hodnoty do druhé rovnice máme $2 = d - c$. Z této a první rovnice plyne $d = 2$, $c = 0$.

Řešení rekurentní rovnice je tedy

$$a_n = -n(-2)^n + 2^{n+1}.$$

Příklad 3.3. Najděte vzorec pro n-tý člen posloupnosti zadané počátečními členy $a_0 = 1$, $a_1 = 0$ a rekurentním vzorcem $a_n = -a_{n-2}$, $n \geq 2$.

V tomto příkladu máme $k = 2$; je vhodné si rekurentní rovnici představit ve tvaru $a_n = 0a_{n-1} - a_{n-2}$.

Řešíme tedy rovnici

$$w^2 + 1 = 0,$$

která má dva jednoduché komplexní kořeny i a $-$i, tj.

$$w_1 = \mathrm{i}, \quad n_1 = 1, \quad w_2 = -\mathrm{i}, \quad n_2 = 1.$$

Polynomy P_1, P_2 mají stupeň nejvýše 0, tedy $P_1(n) = b$, $P_2(n) = c$, kde b, c jsou zatím neznámé koeficienty. Podle vzorce (2.2) má obecné řešení naší rekurentní rovnice tvar

$$a_n = b\mathrm{i}^n + c(-\mathrm{i})^n, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

K nalezení koeficientů b, c využijeme počáteční členy $a_0 = 1$, $a_1 = 0$. Dostaneme tak soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 1 &= b + c, \\ 0 &= b\mathrm{i} - c\mathrm{i}. \end{aligned}$$

Z druhé rovnice plyne $0 = b - c$, což společně s první rovnicí dává $b = 1/2$, $c = 1/2$.

Řešení rekurentní rovnice je tedy

$$a_n = \frac{1}{2}\mathrm{i}^n + \frac{1}{2}(-\mathrm{i})^n.$$

Vidíme, že rekurentní rovnice s reálnými koeficienty může mít komplexní řešení.

Cvičení 3.4. Použijte větu 2.1 k nalezení vzorce pro n-tý člen Fibonacciho posloupnosti $F_0 = 1$, $F_1 = 1$, $F_n = F_{n-2} + F_{n-1}$ pro $n \geq 2$.