Kombinatorika, 31. 5. 2018

Při řešení úloh se můžete odvolávat na tvrzení a výsledky z přednášky, vše ostatní je potřeba pečlivě zdůvodnit. Známka z písemky = min(4, 5−počet správně vyřešených úloh)

1. Standardní balíček karet obsahuje 52 karet s hodnotami 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q, K, A, přičemž každá hodnota se vyskytuje ve čtyřech různých barvách. Jestliže náhodně vybereme šest karet, jaká je pravděpodobnost, že od každé barvy budeme mít aspoň jednu kartu?

2. Posloupnost $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ je zadána počátečním členem $a_0 = 1$ a rekurentním vztahem $a_n = 10a_{n-1} - 3$, $n \geq 1$. Najděte její generující funkci a vzorec pro n-tý člen.

3. Na zábavě se sešlo pět manželských párů, muži $M_1, \ldots, M_5$ a ženy $\check{Z}_1, \ldots, \check{Z}_5$ (M_i a $\check{Z}_i$ jsou manželé). Kolika způsoby z nich lze sestavit smíšené taneční dvojice, jestliže chceme, aby manželé nikdy netančili spolu a dále víme, že $\check{Z}_2$ nechce tančit s M_1, $\check{Z}_3$ nechce tančit s M_2 a $\check{Z}_4$ nechce tančit s M_3?

4. Nechť $n > 1$ je liché číslo. Dokažte, že posloupnost kombinačních čísel

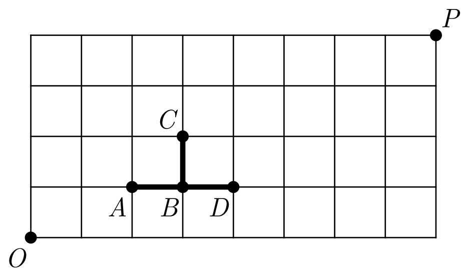
$$\binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \ldots, \binom{n}{\frac{n-1}{2}}$$

obsahuje lichý počet lichých čísel.

Kombinatorika, 6. 6. 2018

Při řešení úloh se můžete odvolávat na tvrzení a výsledky z přednášky, vše ostatní je potřeba pečlivě zdůvodnit. Známka z písemky = min(4, 5−počet správně vyřešených úloh)

1. Uvažujme cesty po hranách čtvercové sítě o rozměrech 8×4 z levého dolního rohu O do pravého horního rohu P. Každá přípustná cesta se skládá pouze z kroků vedoucích vpravo nebo nahoru.



Kolik existuje přípustných cest, jejichž součástí nejsou úsečky AB, BC, BD?

2. Nechť n je přirozené číslo. Kolik existuje podmnožin množiny $\{1, \ldots, n\}$, které neobsahují žádné sousední prvky? (x, $y \in \{1, \ldots, n\}$ jsou sousední, pokud se liší o 1.) Vyjádřete výsledek v co nejjednodušším tvaru.

3. Posloupnost $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ je zadána počátečními členy $a_0 = -4$, $a_1 = 5$, $a_2 = -5$ a rekurentním vztahem $a_n = 4a_{n-1} + 11a_{n-2} - 30a_{n-3}$, $n \geq 3$. Najděte vzorec pro n-tý člen.

4. Ve volbách soupeří dva kandidáti, M a N. Pro M hlasovalo m voličů a pro N hlasovalo n voličů, přičemž $n > m$. Jestliže pořadí sčítání hlasů je náhodné, jaká je pravděpodobnost, že v průběhu sčítání měl N vždy ostře více hlasů než M?

Kombinatorika, 20. 6. 2018

Při řešení úloh se můžete odvolávat na tvrzení a výsledky z přednášky, vše ostatní je potřeba pečlivě zdůvodnit. Známka z písemky = min(4, 5−počet správně vyřešených úloh)

1. Kolik existuje sedmiciferných přirozených čísel, jejichž ciferný součet je 19?
Vyjádřete hledaný počet jako koeficient u vhodné mocniny x ve vhodném součinu polynomů nebo řad a vypočítejte jej.

2. Najděte hodnotu součtu $\sum_{k=0}^{n} \binom{k}{m} k$, kde m, n jsou přirozená čísla.

Návod: Vypočítejte nejprve $\sum_{k=0}^{n} \binom{k}{m}(k+1)$.

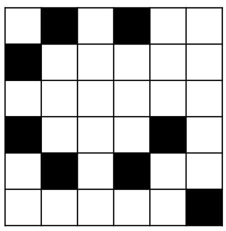
3. Kolika způsoby lze vyplnit obdélník o rozměrech $1 \times n$ pomocí domin (dlaždice 1×2) a modrých a zelených monomin (dlaždice 1×1)? Odvoďte rekurentní rovnici pro hledaný počet a vyřešte ji, tj. najděte vzorec pro n-tý člen.

4. Jistý výrobce prodává kolekce fotografií fotbalistů. Celkem existuje N různých fotografií, každá kolekce obsahuje $n < N$ náhodně vybraných různých fotografií. Zakoupíme-li celkem $k \geq N/n$ kolekcí, jaká je pravděpodobnost, že nasbíráme všech N různých fotografií? Použijte princip inkluze a exkluze.

Kombinatorika, 25. 6. 2018

Při řešení úloh se můžete odvolávat na tvrzení a výsledky z přednášky, vše ostatní je potřeba pečlivě zdůvodnit. Známka z písemky = min(4, 5−počet správně vyřešených úloh)

1. Najděte věžový polynom následující sítě (je tvořena černými políčky):



Kolika způsoby lze na políčka sítě umístit tři neohrožující se věže?

2. Posloupnost $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ je zadána počátečním členem $a_0 = 1$ a rekurentním vztahem $a_n = 10a_{n-1} - 1$ pro $n \geq 1$. Najděte vzorec pro n-tý člen této posloupnosti.

3. Najděte počet řešení rovnice $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$ v oboru celých čísel takových, že pro každé $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ platí $-4 \leq x_i \leq 4$.

4. Máme n rozlišitelných párů rukavic, přičemž levá a pravá rukavice v každém páru jsou rozlišitelné. Kolika způsoby můžeme n osobám přidělit vždy levou a pravou rukavici tak, aby žádná osoba neměla rukavice ze stejného páru? Jak se změní odpověď, jestliže každé osobě přidělíme libovolné dvě rukavice (ne nutně levou a pravou)? Použijte princip inkluze a exkluze.

Výsledky

31. 5. 2018

1.

$$P = \frac{\binom{52}{6} - 4\binom{39}{6} + 6\binom{26}{6} - 4\binom{13}{6}}{\binom{52}{6}} = \frac{8682544}{20358520}$$

2. $a_n = \frac{2}{3} \cdot 10^n + \frac{1}{3}$
3. $5! \cdot 1 - 4! \cdot 8 + 3! \cdot 22 - 2! \cdot 25 + 1! \cdot 11 - 0! \cdot 1 = 20$
4. Součet kombinačních čísel je $2^{n-1} - 1$, tedy lichý.

6. 6. 2018

1.

$$\binom{12}{4} - 3\binom{8}{3} - 4\binom{7}{2} - 4\binom{7}{3} + 3\binom{7}{2} + 3\binom{7}{3} = 271$$

2. F_{n+1}
3. $a_n = -2 \cdot (-3)^n - 3 \cdot 2^n + 5^n$
4. $\frac{n-m}{n+m}$

20. 6. 2018

1. $\binom{24}{6} - 6\binom{14}{6} - \binom{15}{6} = 111573$
2. $(m+1)\binom{n+2}{m+2} - \binom{n+1}{m+1}$
3. $a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2}$, $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $a_2 = 5$. Vzorec pro n-tý člen:

$$a_n = \frac{(1+\sqrt{2})^{n+1} - (1-\sqrt{2})^{n+1}}{2\sqrt{2}}$$

4.

$$P = \frac{\sum_{l=0}^{N} (-1)^l \binom{N}{l} \binom{N-l}{n}^k}{\binom{N}{n}^k}$$

25. 6. 2018

1. $v(x, S) = 1 + 8x + 22x^2 + 25x^3 + 12x^4 + 2x^5$, $v_3(S) = 25$
2. $a_n = (8 \cdot 10^n + 1)/9$
3. 489

4. a) $n! \cdot D_n$, kde D_n je počet permutací n-prvkové množiny bez pevných bodů.
b) $\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k n(n-1)\cdots(n-k+1)(2(n-k))!}{2^{n-k}}$