# Kombinatorika, 31. 5. 2019

Při řešení úloh se můžete odvolávat na tvrzení a výsledky z přednášky, vše ostatní je potřeba pečlivě zdůvodnit. Známka z písemky = min(4, 5−počet správně vyřešených úloh)

**1.** Posloupnost $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ je zadána počátečními členy $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ a rekurentním vztahem

$$a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n-2}), \quad n \geq 2.$$

Najděte vzorec pro $n$-tý člen.

**2.** Mějme dvě rozlišitelné standardní hrací kostky. Jaká je pravděpodobnost, že při šesti hodech těmito kostkami nikdy nepadnou uspořádané dvojice $(1,5)$, $(2,6)$, $(3,4)$, $(5,5)$, $(5,3)$, $(6,1)$, $(6,2)$ a zároveň na každé kostce padne všech šest možných hodnot (v libovolném pořadí)? Použijte vzorec pro počet permutací s omezujícími podmínkami.

**3.** Jaká je pravděpodobnost, že při postupném házení mincí dostaneme stejný počet rubů a líců poprvé po $2n$ hodech?

**4.** Řekneme, že konečná posloupnost čísel $a_1, a_2, \ldots, a_n$ má pokles na pozici $i$, pokud $a_i > a_{i+1}$.

a) Kolika způsoby lze permutovat čísla z množiny $1, \ldots, 9$ tak, že na pozicích 2, 6, 7 mohou (ale nemusejí být) poklesy a nikde jinde poklesy nejsou? (Např. permutace 3, 8, 2, 4, 6, 9, 1, 5, 7 má poklesy pouze na pozicích 2 a 6, je to tedy přípustná permutace. )

b) Kolika způsoby lze permutovat čísla z množiny $1, \ldots, 9$ tak, že na pozicích 2, 6, 7 jsou poklesy a nikde jinde poklesy nejsou? Použijte princip inkluze a exkluze.

---

# Kombinatorika, 11. 6. 2019

Při řešení úloh se můžete odvolávat na tvrzení a výsledky z přednášky, vše ostatní je potřeba pečlivě zdůvodnit. Známka z písemky = min(4, 5−počet správně vyřešených úloh)

**1.** Jaká je pravděpodobnost, že při pěti hodech standardní hrací kostkou získáme součet 17?

**2.** Posloupnost $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ je zadána počátečním členem $a_0 = 1$ a rekurentním vztahem

$$a_{n+1} = 3a_n + n, \quad n \geq 0.$$

Najděte vzorec pro $n$-tý člen.

**3.** Uvažujme následující variantu úlohy o zajatcích: Nechť $n \in \mathbf{N}_0$. Zajatci s čísly $1, \ldots, 2^n$ stojí vedle sebe v řadě. Věznitel kolem nich prochází zleva doprava, přitom nechává popravit prvního a následně každého druhého zajatce (tj. zajatce $1, 3, \ldots, 2^n - 1$). Poté se vrací zpět zprava doleva, všímá si pouze zbývajících živých zajatců, a opět nechává popravit prvního a pak každého druhého (tj. zajatce $2^n, 2^n - 4, 2^n - 8, \ldots$). Na začátku řady se opět obrátí a takto pokračuje až do okamžiku, než zůstane naživu poslední zajatec; tomu bude udělena milost. Nechť $L_n$ značí číslo zajatce, který dostane milost (zřejmě $L_0 = 1$). Najděte rekurentní rovnici pro $L_n$ a spočítejte pomocí ní $L_1, \ldots, L_8$.

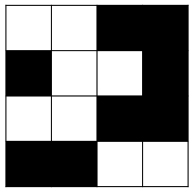
**4.** Mějme balíček tvořený $n \cdot s$ kartami. Každá z nich má jednu z $s$ barev a hodnotu vyjádřenou číslem z množiny $\{1, \ldots, n\}$. Každá dvojice barva-hodnota je v balíčku zastoupena právě jednou kartou. Vytáhneme-li z balíčku náhodně $n$ různých karet, jaká je pravděpodobnost, že pro žádné $i \in \{1, \ldots, n\}$ nemá $i$-tá vytažená karta hodnotu $i$? Použijte princip inkluze a exkluze.

# Kombinatorika, 18. 6. 2019

Při řešení úloh se můžete odvolávat na tvrzení a výsledky z přednášky, vše ostatní je potřeba pečlivě zdůvodnit. Známka z písemky = min(4, 5−počet správně vyřešených úloh)

**1.** V cukrárně prodávají 4 druhy zákusků. Kolika způsoby lze nakoupit 50 zákusků tak, abychom od každého druhu měli lichý počet zákusků? Vyjádřete hledaný počet jako koeficient u vhodné mocniny $x$ ve vhodném součinu polynomů nebo řad a spočítejte jej.

**2.** Najděte věžový polynom následující sítě (je tvořena černými políčky):



Kolika způsoby lze na políčka sítě umístit tři neohrožující se věže?

**3.** Dvě posloupnosti $\{Q_n\}_{n=0}^{\infty}$ a $\{R_n\}_{n=0}^{\infty}$ jsou definovány rekurentními vztahy

$$Q_0 = 0,\;\; Q_n = 2R_{n-1} + 1, \qquad R_0 = 0,\;\; R_n = Q_n + Q_{n-1} + 1.$$

Najděte generující funkci posloupnosti $\{Q_n\}_{n=0}^{\infty}$.

**4.** Uvažujme následující variantu hlavolamu „hanojské věže“: Jsou dány 3 kolíky; na prvním z nich je postavena věž z $n$ kotoučů seřazených podle velikostí (největší je vespod), ostatní jsou prázdné. V každém kroku lze přenést jeden kotouč mezi prvním a druhým kolíkem, nebo mezi druhým a třetím kolíkem, a to tak, že větší kotouč nikdy nesmí ležet na menším. Jaký je nejmenší počet kroků potřebný k přenesení věže z prvního na třetí kolík?

---

# Kombinatorika, 12. 9. 2019

Při řešení úloh se můžete odvolávat na tvrzení a výsledky z přednášky, vše ostatní je potřeba pečlivě zdůvodnit. Známka z písemky = min(4, 5−počet správně vyřešených úloh)

**1.** Nechť $n$ je přirozené číslo. Najděte hodnotu součtu

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}\binom{n}{k}.$$

**2.** Posloupnost $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ je zadána počátečními členy $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ a rekurentním vztahem $a_n = 3a_{n-1} + 4a_{n-2} - 12a_{n-3}$, $n \geq 3$. Najděte vzorec pro $n$-tý člen.

**3.** Při dvaceti hodech mincí padl celkem třináctkrát líc a sedmkrát rub. Jaká je pravděpodobnost, že v průběhu házení nikdy nepadlo pět líců po sobě?

*Návod:* Počet příznivých případů lze vyjádřit jako počet řešení jisté rovnice s celočíselnými neznámými, které reprezentují délky souvislých úseků tvořených líci.

**4.** K dispozici máme $n$ druhů předmětů, předměty jednoho druhu jsou navzájem nerozlišitelné. Od každého druhu vezmeme dva a získaných $2n$ předmětů poskládáme do řady. Kolika způsoby to lze provést? Jak se změní odpověď, budeme-li požadovat, aby předměty stejného druhu nikdy neležely vedle sebe? (Např. pro $n = 2$ máme dvě možnosti.) Použijte princip inkluze a exkluze.

# Výsledky

### 31. 5. 2019

**1.** $a_n = 2/3 \cdot (1 - (-1/2)^n)$
**2.** $P = 6!(6!1 - 5!7 + 4!18 - 3!21 + 2!11 - 1!2)/36^6 = 6!206/36^6$
**3.** $P = 2C_{n-1}/2^{2n} = 2\binom{2n-2}{n-1}/(4^n \cdot n)$
**4.** a) 3780, b) 1667

### 11. 6. 2019

**1.** $P = \frac{\binom{16}{4} - 5\binom{10}{4} + \binom{5}{2}}{6^5} = \frac{780}{6^5}$
**2.** $a_n = -\frac{n}{2} - \frac{1}{4} + \frac{5}{4}3^n$
**3.** $L_n = 2^n - 2L_{n-1} + 2$, $L_0 = 1$, dalších osm členů: 2, 2, 6, 6, 22, 22, 86, 86
**4.** $P = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k \binom{n}{k} s^k}{ns(ns-1)\cdots(ns-k+1)}$

### 18. 6. 2019

**1.** $\binom{26}{3}$
**2.** $v(x, S) = 1 + 8x + 19x^2 + 14x^3 + 2x^4$, $v_3(S) = 14$
**3.** $Q(z) = \frac{2z^2 + z}{(1-z)(1-2z-2z^2)}$
**4.** $3^n - 1$

### 12. 9. 2019

**1.** $1/(n + 1)$
**2.** $a_n = -\frac{3}{20}(-2)^n - \frac{1}{4}2^n + \frac{2}{5}3^n$
**3.** $P = \frac{\binom{20}{7} - 8\binom{15}{7} + 28\binom{10}{7}}{\binom{20}{7}} = 245/646$
**4.** a) $\frac{(2n)!}{2^n}$, b) $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{(2n-k)!}{2^{n-k}}$