Polynomy a řady v kombinatorice

Antonín Slavík
Matematicko-fyzikální fakulta UK

O užitečnosti polynomů a nekonečných řad v kombinatorice jsme se již přesvědčili v kapitolách věnovaných věžovým polynomům a generujícím funkcím.

V této kapitole si ukážeme, že některé kombinatorické úlohy související např. s rozmísťováním nebo vybíráním předmětů lze chápat jako hledání počtu řešení vhodné rovnice. Tento problém lze následně převést na násobení polynomů nebo mocninných řad.

1 O počtu řešení jisté rovnice

Předpokládejme, že jsou dána čísla $k \in \mathbb{N}$ a $n \in \mathbb{N}_0$. Kolik řešení má rovnice

$$n_1 + \cdots + n_k = n \tag{1.1}$$

s neznámými $n_1, \ldots, n_k$, které mohou nabývat pouze hodnot z oboru nezáporných celých čísel? S touto úlohou jsme se již setkali, avšak v jiné podobě: *Kolika způsoby lze rozmístit n stejných předmětů do k rozlišitelných přihrádek?* V kapitole *Rozmisťovací úlohy*, oddíl 1.2a), jsme ukázali, že počet rozmístění je roven $\binom{n+k-1}{k-1}$. Souvislost s řešením rovnice (1.1) je jednoduchá, stačí interpretovat čísla $n_1, \ldots, n_k$ jako počty předmětů v jednotlivých přihrádkách. Toto pozorování tvoří první část následující poznámky.

Poznámka 1.1. Každé řešení rovnice (1.1), kde $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}_0$, lze chápat jako:

- Rozmístění n stejných předmětů do k rozlišitelných přihrádek (do i-té přihrádky dáme n_i předmětů).
- Výběr n předmětů z k druhů předmětů, při kterém nezáleží na pořadí a předměty stejného druhu jsou nerozlišitelné (od i-tého druhu vezmeme n_i předmětů).

Kombinatorické úlohy popsané v předchozí poznámce lze tedy převést na hledání počtu řešení rovnice (1.1). Uvažujme ještě obecnější situaci, kdy $n_1, \ldots, n_k$ nejsou libovolná nezáporná celá čísla, ale mohou nabývat pouze hodnot z jistých předepsaných množin $I_1, \ldots, I_k \subset \mathbb{N}_0$. Zajímá nás počet řešení rovnice (1.1) za těchto podmínek. Následující věta říká, že problém lze převést na násobení polynomů nebo mocninných řad (podle toho, zda množiny $I_1, \ldots, I_k$ jsou konečné nebo nekonečné).

Věta 1.2. *Nechť jsou dány množiny $I_1, \ldots, I_k \subset \mathbb{N}_0$ a číslo $n \in \mathbb{N}$. Pak počet řešení rovnice*

$$n_1 + \cdots + n_k = n, \quad n_1 \in I_1,\ \ldots,\ n_k \in I_k,$$

je roven koeficientu u x^n v součinu

$$\left(\sum_{n_1 \in I_1} x^{n_1} \right) \cdots \left(\sum_{n_k \in I_k} x^{n_k} \right).$$

Důkaz. Roznásobením součinu dostaneme

$$\sum_{n_1 \in I_1, \ldots, n_k \in I_k} x^{n_1} \cdots x^{n_k} = \sum_{n_1 \in I_1, \ldots, n_k \in I_k} x^{n_1 + \cdots n_k}.$$

Sčítanec x^n se v sumě objeví tolikrát, kolikrát lze zvolit $n_1 \in I_1, \ldots, n_k \in I_k$ splňující $n_1 + \cdots n_k = n$. $\square$

Zkusme větu pro kontrolu použít nejdříve na případ $I_1 = \cdots = I_k = \mathbb{N}_0$, kdy již známe řešení. Věta říká, že počet řešení rovnice (1.1) je roven koeficientu u x^n v součinu

$$(x^0 + x^1 + x^2 + \cdots)^k.$$

Použijeme vzorec pro součet geometrické řady a následně vzorec $\frac{1}{(1-x)^k} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k-1} x^n$ z kapitoly *Generující funkce*:[1]

$$(x^0 + x^1 + x^2 + \cdots)^k = \frac{1}{(1-x)^k} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k-1} x^n.$$

Koeficient u x^n je $\binom{n+k-1}{k-1}$, což souhlasí s dříve získaným výsledkem.

2 Příklady

Použití věty 1.2 nyní ilustrujeme na dalších příkladech.

Příklad 2.1. *V cukrárně prodávají tři druhy zákusků – větrníky, kremrole a punčové dortíky. Kolika způsoby lze koupit 12 zákusků tak, abychom od každého druhu měli aspoň dva zákusky a přitom koupili nejvýše tři kremrole?*

Nechť n_1 je počet zakoupených větrníků, n_2 počet kremrolí a n_3 počet punčových dortíků. Ze zadání je jasné, že počet větrníků nemůže přesáhnout 8 a totéž platí pro počet punčových dortíků.

Hledáme tedy počet řešení rovnice

$$n_1 + n_2 + n_3 = 12, \quad n_1 \in \{2, 3, \ldots, 8\}, \quad n_2 \in \{2, 3\}, \quad n_3 \in \{2, 3, \ldots, 8\}.$$

Získáme jej jako koeficient u x^{12} v součinu

$$(x^2 + x^3 + \cdots + x^8)(x^2 + x^3)(x^2 + x^3 + \cdots + x^8). \tag{2.1}$$

Z první a třetí závorky vytkneme x^2, poté použijeme vzorec pro součet konečné geometrické řady a upravujeme:

$$(x^6 + x^7)(1 + x + x^2 + \cdots + x^6)^2 = (x^6 + x^7)\frac{(1-x^7)^2}{(1-x)^2} = \frac{(x^6 + x^7)(1 - 2x^7 + x^{14})}{(1-x)^2} =$$
$$= \frac{x^6 + x^7 - 2x^{13} - 2x^{14} + x^{20} + x^{21}}{(1-x)^2} = (x^6 + x^7 - 2x^{13} - 2x^{14} + x^{20} + x^{21}) \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+1}{1} x^n.$$

Vidíme, že koeficient u x^{12} v získaném výrazu je

$$\binom{6+1}{1} + \binom{5+1}{1} = 7 + 6 = 13.$$

Existuje tedy 13 způsobů, jak zakoupit zákusky.

Ukážeme si ještě jednodušší způsob řešení:

Můžeme hledat počet řešení rovnice

$$n_1 + n_2 + n_3 = 12, \quad n_1 \in \{2, 3, \ldots\}, \quad n_2 \in \{2, 3\}, \quad n_3 \in \{2, 3, \ldots\},$$

kde jsme pro n_1 a n_3 formálně povolili hodnoty vyšší než 8. To nijak neovlivní počet řešení úlohy, protože pro n_1 nebo n_3 větší než 8 nemůže být rovnice splněna (při respektování oborů hodnot pro n_1, n_2, n_3).

[1] Vzorec budeme již bez dalšího vysvětlování používat i v následujících příkladech.

Počet řešení rovnice nyní získáme jako koeficient u x^{12} v součinu

$$(x^2 + x^3 + \cdots)(x^2 + x^3)(x^2 + x^3 + \cdots). \tag{2.2}$$

Upravujeme jej podobně jako výše, jen místo vzorce pro součet konečné geometrické řady použijeme vzorec pro součet nekonečné řady:

$$(x^6 + x^7)(1 + x + x^2 + \cdots)^2 = \frac{x^6 + x^7}{(1-x)^2} = (x^6 + x^7)\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+1}{1}x^n.$$

Vidíme, že koeficient u x^{12} je opět

$$\binom{6+1}{1} + \binom{5+1}{1} = 7 + 6 = 13.$$

Pokud si dobře prohlédneme součiny (2.1) a (2.2), pak je i bez počítání zřejmé, že koeficient u x^{12} musel v obou případech vyjít stejně. Součin (2.2) totiž v porovnání s (2.1) obsahuje v první a ve třetí závorce navíc deváté a vyšší mocniny x. Po roznásobení se z nich stanou třinácté a vyšší mocniny x, tudíž nemohou ovlivnit koeficient u x^{12}.

Druhé řešení bylo jednodušší, protože vzorec pro součet nekonečné geometrické řady je jednodušší než vzorec pro součet konečné řady. Je dobré to mít na paměti – pokud máme na výběr, upřednostníme nekonečné geometrické řady před konečnými. Pokud bychom ovšem chtěli úlohu řešit na počítači, je naopak výhodnější vyjít z prvního způsobu řešení. Stačí mít k dispozici program, který umí násobit polynomy, nechat roznásobit součin (2.1) a podívat se na koeficient u x^{12}.

Příklad 2.2. *Kolika způsoby lze rozdělit 25 stejných zákusků 7 osobám tak, aby každá dostala aspoň jeden a první osoba nejvýše deset zákusků? (Osoby jsou rozlišitelné.)*

Nechť $n_1, \ldots, n_7$ značí počty zákusků přidělených jednotlivým osobám.[2] Hledáme počet řešení rovnice

$$n_1 + \cdots + n_7 = 25, \quad n_1 \in \{1, \ldots, 10\}, \quad n_2, \ldots, n_7 \in \{1, 2, \ldots\}.$$

Získáme jej jako koeficient u x^{25} v součinu

$$\begin{aligned}(x^1 + \cdots + x^{10})(x^1 + x^2 + \cdots)^6 &= x^7(1 + \cdots + x^9)(1 + x + \cdots)^6 = \\ &= x^7\frac{1 - x^{10}}{1 - x}\frac{1}{(1-x)^6} = \frac{x^7 - x^{17}}{(1-x)^7} = (x^7 - x^{17})\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+6}{6}x^n.\end{aligned}$$

Hledaný koeficient u x^{25} je roven

$$\binom{18+6}{6} - \binom{8+6}{6} = 131\,593.$$

Existuje tedy 131 593 způsobů, jak rozdělit zákusky.

Příklad 2.3. *Jaká je pravděpodobnost, že při 12 hodech klasickou hrací kostkou získáme součet 30?*

Nechť $n_1, \ldots, n_{12}$ jsou výsledky jednotlivých hodů. Abychom vypočítali počet příznivých případů, stačí najít počet řešení rovnice

$$n_1 + \cdots + n_{12} = 30, \quad n_1, \ldots, n_{12} \in \{1, \ldots, 6\}.$$

Získáme jej jako koeficient u x^{30} v součinu

$$(x^1 + \cdots + x^6)^{12}.$$

[2] Jde vlastně o druhou situaci popsanou v poznámce 1.1, přičemž osoby představují přihrádky.

Nejsnazší by bylo úlohu vyřešit na počítači, můžeme ale zkusit počítat „ručně“:

$$(x^1+\cdots+x^6)^{12} = x^{12}(1+x+\cdots+x^5)^{12} = x^{12}\frac{(1-x^6)^{12}}{(1-x)^{12}} = x^{12}(1-x^6)^{12}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+11}{11}x^n.$$

Výraz $(1-x^6)^{12}$ umocníme podle binomické věty; stačí nám mocniny x nepřevyšující 18, neboť vyšší mocniny po vynásobení členem x^{12} nemohou ovlivnit koeficient u x^{30}:

$$x^{12}\left(\binom{12}{0}-\binom{12}{1}x^6+\binom{12}{2}x^{12}-\binom{12}{3}x^{18}+\cdots\right)\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+11}{11}x^n$$

Hledaný koeficient u x^{30} je roven

$$\binom{12}{0}\binom{18+11}{11}-\binom{12}{1}\binom{12+11}{11}+\binom{12}{2}\binom{6+11}{11}-\binom{12}{3}\binom{11}{11} = 19\,188\,950.$$

Počet všech případů, které mohou nastat při 12 hodech kostkou, je 6^{12}. Hledaná pravděpodobnost je tedy

$$P = \frac{19\,188\,950}{6^{12}} \doteq 0{,}009.$$

Příklad 2.4. *Kolika způsoby lze stokorunu rozměnit na pětikoruny, desetikoruny a dvacetikoruny?*

Tuto úlohu je poněkud obtížnější převést na hledání počtu řešení vhodné rovnice. Pokud bychom za n_1, n_2, n_3 vzali počty pětikorun, desetikorun a dvacetikorun, pak hledáme počet řešení rovnice

$$5n_1 + 10n_2 + 20n_3 = 100, \quad n_1, n_2, n_3 \in \{0, 1, \ldots\}.$$

Věta 1.2 se na tuto rovnici se nevztahuje, substitucí $m_1 = 5n_1$, $m_2 = 10n_2$, $m_3 = 20n_3$ ji však můžeme převést na rovnici

$$m_1 + m_2 + m_3 = 100, \quad m_1 \in \{0, 5, 10, \ldots\}, \quad m_2 \in \{0, 10, 20, \ldots\}, \quad m_3 \in \{0, 20, 40, \ldots\},$$

jejíž počet řešení již dokážeme určit. Čísla m_1, m_2, m_3 mají navíc jednoduchou interpretaci – jde o částky získané z pětikorun, desetikorun, resp. dvacetikorun. Rovnici jsme tedy mohli napsat již na začátku a vyhnout se substituci.

Počet řešení je roven koeficientu u x^{100} v součinu

$$(1+x^5+x^{10}+\cdots)(1+x^{10}+x^{20}+\cdots)(1+x^{20}+x^{40}+\cdots) = \frac{1}{1-x^5}\frac{1}{1-x^{10}}\frac{1}{1-x^{20}}. \tag{2.3}$$

Získali jsme racionální funkci, kterou potřebujeme rozvinout do mocninné řady. Rozklad na parciální zlomky by byl velmi pracný, neboť ve jmenovateli máme polynom vysokého stupně. Lepší je povšimnout si, že

$$\begin{aligned}1-x^{10} &= (1-x^5)(1+x^5),\\ 1-x^{20} &= (1-x^{10})(1+x^{10}) = (1-x^5)(1+x^5)(1+x^{10}).\end{aligned}$$

Zlomky v (2.3) tedy můžeme rozšířit tak, aby měly stejného jmenovatele $1-x^{20}$:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{1-x^5}\frac{1}{1-x^{10}}\frac{1}{1-x^{20}} = \frac{(1+x^5)(1+x^{10})}{1-x^{20}}\frac{1+x^{10}}{1-x^{20}}\frac{1}{1-x^{20}} = \frac{(1+x^5)(1+x^{10})^2}{(1-x^{20})^3} =\\ &= \frac{(1+x^5)(1+2x^{10}+x^{20})}{(1-x^{20})^3} = (1+x^5+2x^{10}+2x^{15}+x^{20}+x^{25})\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+2}{2}x^{20n}.\end{aligned}$$

Hledaný koeficient u x^{100} je roven

$$\binom{5+2}{2}+\binom{4+2}{2} = \binom{7}{2}+\binom{6}{2} = 36.$$

Existuje tedy 36 způsobů, jak rozměnit stokorunu.

Pokud bychom úlohu chtěli řešit pomocí počítače, pak je vhodné nekonečné řady nahradit konečnými, roznásobit součin

$$(1 + x^5 + x^{10} + \cdots + x^{100})(1 + x^{10} + x^{20} + \cdots + x^{100})(1 + x^{20} + x^{40} + \cdots + x^{100})$$

a podívat se na koeficient u x^{100}.

Ukážeme si ještě jednodušší „ruční“ způsob řešení:

Všimneme si, že počet použitých pětikorun nemůže být lichý. Hledáme tedy počet řešení rovnice

$$m_1 + m_2 + m_3 = 100, \quad m_1, m_2 \in \{0, 10, 20, \ldots\}, \quad m_3 \in \{0, 20, 40, \ldots\}.$$

Získáme jej jako koeficient u x^{100} v součinu

$$\begin{aligned}(1 + x^{10} + x^{20} + \cdots)^2(1 + x^{20} + x^{40} + \cdots) &= \frac{1}{(1 - x^{10})^2} \frac{1}{1 - x^{20}} = \frac{(1 + x^{10})^2}{(1 - x^{20})^3} = \\ &= (1 + 2x^{10} + x^{20}) \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+2}{2} x^{20n}.\end{aligned}$$

Hledaný koeficient u x^{100} je opět roven

$$\binom{5+2}{2} + \binom{4+2}{2} = \binom{7}{2} + \binom{6}{2} = 36.$$