Rozmisťovací úlohy

Antonín Slavík
Matematicko-fyzikální fakulta UK

Budeme se zabývat úlohami typu *kolika způsoby lze rozmístit n předmětů do r přihrádek?*. Aby byla úloha jednoznačně zadána, je třeba doplnit následující informace:

- Jsou přihrádky rozlišitelné, nebo nerozlišitelné?
- Jsou předměty rozlišitelné, nebo nerozlišitelné?
- Záleží na pořadí předmětů v každé přihrádce?
- Mohou být některé přihrádky prázdné?

Zdá se tedy, že dostáváme celkem 16 variant úlohy, avšak pokud jsou předměty nerozlišitelné, nemůže záležet na jejich pořadí v přihrádkách. 4 varianty úlohy tedy nedávají smysl a zbývá nám 12 variant, které nyní rozebereme.

1 Přihrádky rozlišitelné

1.1 Předměty rozlišitelné

1.1.1 Nezáleží na pořadí předmětů v přihrádkách

Příklad úlohy: Kolika způsoby lze rozdělit n různých zákusků r osobám? (zákusky = předměty, osoby = přihrádky)

a) Přihrádky mohou být prázdné (některé osoby nemusejí dostat žádný zákusek):
   Počet možností je r^n (pro každý předmět máme na výběr z r přihrádek).

b) Přihrádky nesmí být prázdné (každá osoba musí dostat aspoň jeden zákusek):
   Zaveďme následující označení:
   A ... množina všech rozmístění n předmětů do r přihrádek (připouštějí se i prázdné)
   A_i, kde $i \in \{1, \dots, r\}$ ... množina všech rozmístění n předmětů do r přihrádek, kde i-tá přihrádka musí být prázdná
   Nyní stačí vypočítat $|\overline{A_1} \cap \dots \cap \overline{A_r}|$ pomocí principu inkluze a exkluze:

$$|\overline{A_1} \cap \dots \cap \overline{A_r}| = |A| - \sum_{k=1}^{r} (-1)^{k-1} \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_k \le r} |A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}| =$$

$$= r^n - \sum_{k=1}^{r} (-1)^{k-1} \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_k \le r} (r-k)^n = r^n + \sum_{k=1}^{r} (-1)^k \binom{r}{k} (r-k)^n = \sum_{k=0}^{r} (-1)^k \binom{r}{k} (r-k)^n.$$

1.1.2 Záleží na pořadí předmětů v přihrádkách

Příklad úlohy: Kolika způsoby lze rozestavit n osob do front před r pokladnami? (osoby = předměty, fronty = přihrádky; ve frontě záleží na pořadí osob a fronty jsou rozlišitelné, neboť u každé pokladny sedí jiný prodavač)

Pozorování: Pokud osobám přidělíme čísla $1, \ldots, n$, můžeme jejich rozestavení do front znázornit schématem, kde oddělovače signalizují začátek nové fronty. Mějme např. $n = 10$ a $r = 3$. Pokud u 1. pokladny stojí osoby 2, 1, 7, 4 (v tomto pořadí), u 2. pokladny osoby 10, 3, 5 a u 3. pokladny osoby 8, 9, 6, pak příslušné schéma bude vypadat takto: 2 1 7 4 | 10 3 5 | 8 9 6

Obecně: Rozdělení n různých předmětů do r rozlišitelných přihrádek lze znázornit schématem sestaveným z čísel $1, \ldots, n$ a $r-1$ oddělovačů. Každé takové schéma lze obráceně interpretovat jako rozdělení n předmětů do r přihrádek. Schémata, kdy některé přihrádky jsou prázdné, poznáme tak, že oddělovač stojí hned na začátku (první přihrádka je pak prázdná), úplně na konci (poslední přihrádka je prázdná), případně dva oddělovače stojí těsně vedle sebe.

a) Přihrádky mohou být prázdné (u některých pokladen nemusejí stát žádné osoby):

   Hledáme počet všech schémat sestavených z čísel $1, \ldots, n$ a $r - 1$ oddělovačů. Jde o permutace s opakováním a jejich počet je
   $$\frac{(n+r-1)!}{(r-1)!}.$$

b) Přihrádky nesmí být prázdné (u každé pokladny stojí aspoň jedna osoba):

   Hledáme počet všech schémat sestavených z čísel $1, \ldots, n$ a $r-1$ oddělovačů, přičemž žádný oddělovač nestojí na začátku ani na konci a dva oddělovače nesmí být těsně vedle sebe. Každé takové schéma můžeme získat tím, že napíšeme libovolnou permutaci čísel $1, \ldots, n$ a poté vybereme $r - 1$ různých mezer mezi nimi, do kterých vložíme oddělovače. Počet možností, jak to provést, je
   $$n!\binom{n-1}{r-1}.$$

1.2 Předměty nerozlišitelné

Víme, že v tomto případě nezáleží na pořadí předmětů v přihrádkách.

Příklad úlohy: Kolika způsoby lze rozdělit n stejných zákusků r osobám? (zákusky = předměty, osoby = přihrádky)

Pozorování: Každé rozdělení lze znázornit schématem, kde kolečka reprezentují zákusky a oddělovače signalizují, že na daném místě začínají zákusky pro další osobu. Mějme např. $n = 11$ a $r = 4$. Pokud 1. osoba dostane 3 zákusky, 2. osoba 5 zákusků, 3. osoba 2 zákusky a 4. osoba 1 zákusek, pak příslušné schéma bude vypadat takto: $\circ\ \circ\ \circ \mid \circ\ \circ\ \circ\ \circ\ \circ \mid \circ\ \circ \mid \circ$

Obecně: Rozdělení n stejných předmětů do r rozlišitelných přihrádek lze znázornit schématem sestaveným z n koleček a $r - 1$ oddělovačů. Každé takové schéma lze obráceně interpretovat jako rozdělení n předmětů do r přihrádek. Schémata, kdy některé přihrádky jsou prázdné, poznáme tak, že oddělovač stojí hned na začátku (první přihrádka je pak prázdná), úplně na konci (poslední přihrádka je prázdná), případně dva oddělovače stojí těsně vedle sebe.

a) Přihrádky mohou být prázdné (některé osoby nemusejí dostat žádný zákusek):

   Hledáme počet všech schémat sestavených z n koleček a $r - 1$ oddělovačů. Jde o permutace s opakováním a jejich počet je[1]

$$\frac{(n+r-1)!}{n!(r-1)!} = \binom{n+r-1}{r-1}.$$

b) Přihrádky nesmí být prázdné (každá osoba musí dostat aspoň jeden zákusek):

Hledáme počet všech schémat sestavených z n koleček a $r-1$ oddělovačů, přičemž žádný oddělovač nestojí na začátku ani na konci a dva oddělovače nesmí být těsně vedle sebe. Každé takové schéma můžeme získat tím, že nakreslíme n koleček a poté vybereme $r-1$ různých mezer mezi nimi, do kterých vložíme oddělovače. Počet možností, jak to provést, je

$$\binom{n-1}{r-1}.$$

2 Přihrádky nerozlišitelné

2.1 Předměty rozlišitelné

2.1.1 Nezáleží na pořadí předmětů v přihrádkách

Příklad úlohy: Kolika způsoby lze rozdělit n různých zákusků na r stejných talířů? (zákusky = předměty, talíře = přihrádky; uspořádání zákusků na talíři není podstatné)

Ekvivalentně: Kolika způsoby lze rozdělit prvky n-prvkové množiny do r podmnožin? (prvky = předměty, podmnožiny = přihrádky)

a) Přihrádky nesmí být prázdné (na každém talíři musí být aspoň jeden zákusek):

Pro rozlišitelné předměty a neprázdné přihrádky platí:

počet rozdělení do r rozlišitelných přihrádek = $r! \cdot$ (počet rozdělení do r nerozlišitelných přihrádek)

V řeči zákusků: počet rozdělení zákusků r osobám = $r! \cdot$ (počet rozdělení zákusků na r talířů)

Jakmile totiž rozdělíme zákusky na talíře, máme $r!$ možností, jak je přidělit r osobám.[2]

S využitím řešení úlohy 1.1.1 b) tedy dostáváme výsledek, který označíme symbolem $S(n,r)$:

$$S(n,r) = \frac{1}{r!}\sum_{k=0}^{r}(-1)^k\binom{r}{k}(r-k)^n.$$

Těmto číslům se říká Stirlingova čísla 2. druhu. Udávají počet způsobů, jak rozdělit prvky n-prvkové množiny do r neprázdných podmnožin. Následující tabulka obsahuje hodnoty $S(n,r)$ pro $n, r \in \{1,\ldots,5\}$:

$n\backslash r$	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
1	1	0	0	0	0
2	1	1	0	0	0
3	1	3	1	0	0
4	1	7	6	1	0
5	1	15	25	10	1

[1] Není náhoda, že výsledek vypadá stejně, jako vzorec pro kombinace s opakováním. Rozdělování n stejných zákusků r osobám si totiž můžeme představit též jako výběr neuspořádané n-tice z r osob s opakováním (kolikrát osobu vybereme, tolik dostane zákusků).

[2] Pokud bychom připustili prázdné talíře nebo pokud by zákusky byly nerozlišitelné, pak analogické tvrzení neplatí.

Např. $S(3,2) = 3$, neboť existují 3 způsoby, jak rozdělit množinu $\{1,2,3\}$ do dvou neprázdných podmnožin: $\{1,2\},\{3\}$; $\{1,3\},\{2\}$; $\{1\},\{2,3\}$

Stirlingova čísla lze počítat i jinak než pomocí výše uvedeného vzorce: Stačí si uvědomit, že:

1. $\forall n \in \mathbb{N}\ S(n,1) = 1$ (počet rozdělení n předmětů do 1 neprázdné přihrádky je 1)
2. $\forall n \in \mathbb{N}\ S(n,n) = 1$ (počet rozdělení n předmětů do n neprázdných přihrádek je 1)
3. $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall r > n\ S(n,r) = 0$ (počet neprázdných přihrádek nemůže být větší než počet předmětů)
4. $\forall n \geq 2\ \forall r \geq 2\ S(n,r) = S(n-1,r-1) + r \cdot S(n-1,r)$ (chceme-li rozdělit n předmětů do n neprázdných přihrádek, pak jsou dvě možnosti: n-tý předmět je sám v jedné přihrádce a zbylých $n-1$ předmětů v $r-1$ přihrádkách, nebo n-tý předmět není sám; tyto případy dostaneme tak, že rozdělíme prvních $n-1$ předmětů do r přihrádek a n-tý předmět pak přidáme do některé z nich)

Pravidla 1 a 2 říkají, že v prvním sloupci a na diagonále tabulky jsou samé jedničky. Pravidlo 3 říká, že vpravo od diagonály jsou nuly. Pravidlo 4 říká, že čísla v n-tém řádku lze počítat pomocí čísel v $(n-1)$-ním řádku, např. $S(3,2) = S(2,1) + 2 \cdot S(2,2) = 1 + 2 = 3$.

b) Přihrádky mohou být prázdné (některé talíře mohou zůstat prázdné):

Rozdělení předmětů do r ne nutně neprázdných přihrádek je totéž, jako rozdělení předmětů do k neprázdných přihrádek, kde k je libovolné číslo mezi 1 a r. Využitím výsledku z části a) tedy dostáváme, že hledaný počet je roven

$$\sum_{k=1}^{r} S(n,k).$$

2.1.2 Záleží na pořadí předmětů v přihrádkách

Příklad úlohy: Kolika způsoby lze rozestavit n osob do r zástupů? (osoby = předměty, zástupy = přihrádky; nezáleží na pořadí zástupů, pouze na tom, kdo je s kým v zástupu a na jaké pozici)

a) Přihrádky nesmí být prázdné (v každém zástupu je aspoň jedna osoba):

Pro rozlišitelné předměty a neprázdné přihrádky platí:

počet rozdělení do r rozlišitelných přihrádek $= r! \cdot$ (počet rozdělení do r nerozlišitelných přihrádek)

V řeči osob: počet rozestavení do r front u pokladen $= r! \cdot$ (počet rozestavení do r zástupů)

Jakmile totiž rozdělíme osoby do zástupů, máme $r!$ možností, jak tyto zástupy rozmístit k r pokladnám.[3]

S využitím řešení úlohy 1.1.2 b) tedy dostáváme výsledek

$$\frac{n!}{r!}\binom{n-1}{r-1}.$$

b) Přihrádky mohou být prázdné (připouštíme i prázdné „zástupy“):

Rozdělení předmětů do r ne nutně neprázdných přihrádek je totéž, jako rozdělení předmětů do k neprázdných přihrádek, kde k je libovolné číslo mezi 1 a r. Využitím výsledku z části a) tedy dostáváme, že hledaný počet je roven

$$\sum_{k=1}^{r} \frac{n!}{k!}\binom{n-1}{k-1}.$$

[3] Pokud bychom připustili prázdné zástupy/fronty, pak analogické tvrzení neplatí.

2.2 Předměty nerozlišitelné

Víme, že v tomto případě nezáleží na pořadí předmětů v přihrádkách.

Příklad úlohy: Kolika způsoby lze rozdělit n stejných zákusků na r stejných talířů? (zákusky = předměty, talíře = přihrádky)

a) Přihrádky nesmí být prázdné (na každém talíři je aspoň jeden zákusek):

Označme hledaný počet symbolem $p(n,r)$. Následující tabulka obsahuje hodnoty $p(n,r)$ pro $n, r \in \{1, \ldots, 5\}$:

$n\backslash r$	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
1	1	0	0	0	0
2	1	1	0	0	0
3	1	1	1	0	0
4	1	2	1	1	0
5	1	2	2	1	1

K získání hodnot si stačí uvědomit, že platí:

1. $\forall n \in \mathbb{N}\ p(n,1) = 1$ (počet rozdělení n předmětů do 1 neprázdné přihrádky je 1)
2. $\forall n \in \mathbb{N}\ p(n,n) = 1$ (počet rozdělení n předmětů do n neprázdných přihrádek je 1)
3. $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall r > n\ p(n,r) = 0$ (počet neprázdných přihrádek nemůže být větší než počet předmětů)
4. $\forall n > r\ p(n,r) = \sum_{k=1}^{r} p(n-r,k)$ (do každé přihrádky musíme dát aspoň 1 předmět a zbylých $n-r$ předmětů pak rozdělíme do prvních k přihrádek, kde k je libovolné číslo mezi 1 a r)

Pravidla 1 a 2 říkají, že v prvním sloupci a na diagonále tabulky jsou samé jedničky. Pravidlo 3 říká, že vpravo od diagonály jsou nuly. Pravidlo 4 říká, že čísla v n-tém řádku lze počítat pomocí čísel v předchozích řádcích, např. $p(3,2) = p(1,1)+p(1,2) = 1+0 = 1$, $p(4,2) = p(2,1)+p(2,2) = 1+1 = 2$, atd.

Každou hodnotu $p(n,r)$ lze tedy vypočítat tak, že sestavíme prvních n řádků tabulky pomocí výše uvedených pravidel. Není znám žádný jednoduchý explicitní vzorec umožňující efektivnější výpočet.

b) Přihrádky mohou být prázdné (některé talíře mohou zůstat prázdné):

Rozdělení předmětů do r ne nutně neprázdných přihrádek je totéž, jako rozdělení předmětů do k neprázdných přihrádek, kde k je libovolné číslo mezi 1 a r. Využitím výsledku z části a) tedy dostáváme, že hledaný počet je roven

$$\sum_{k=1}^{r} p(n,k).$$

Poznámka: Kolika způsoby lze libovolné číslo $n \in \mathbb{N}$ rozložit na součet r přirozených sčítanců, přičemž nezáleží na jejich pořadí? Je to stejná úloha, jako rozdělování n jednotek do r nerozlišitelných neprázdných přihrádek. Počet rozkladů n tvořených r sčítanci je tedy roven $p(n,r)$. Číslo $p(n) = \sum_{k=1}^{n} p(n,k)$, což je součet čísel v n-tém řádku výše uvedené tabulky, lze interpretovat jako počet všech rozkladů čísla n s libovolným počtem sčítanců (zřejmě jejich počet je aspoň 1 a nejvýše n). Není znám žádný jednoduchý explicitní vzorec pro $p(n)$, tato čísla jsou však předmětem výzkumu v teorii čísel a existují např. asymptotické odhady $p(n)$ pro velká n. Viz např. `https://en.wikipedia.org/wiki/Partition_(number_theory)`.