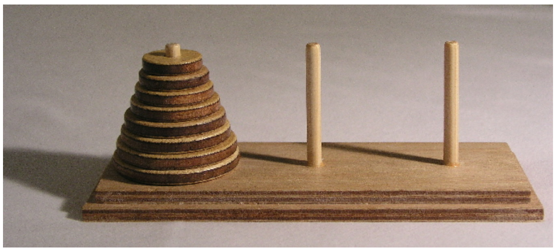
Úlohy vedoucí na rekurentní rovnice

Antonín Slavík
Matematicko-fyzikální fakulta UK

V kombinatorice (i v jiných oblastech matematiky) se stává, že zadanou úlohu neumíme vyřešit přímo, ale dokážeme ji převést na úlohu stejného typu a „menšího rozsahu“. Takové úlohy často vedou na rekurentní rovnice. Ukážeme si tři klasické úlohy tohoto druhu.

1 Hanojské věže

Ve hře známé pod názvem „hanojské věže“ máme k dispozici 3 kolíky a 8 kotoučů různých velikostí. Na začátku hry jsou všechny kotouče na levém kolíku, úkolem hráče je přenést kotouče na pravý kolík. V každém kroku je povoleno přemístit jeden kotouč z jednoho kolíku na jiný, a to tak, že větší kotouč nikdy nesmí ležet na menším. Jaký je nejmenší počet kroků potřebných k dosažení cíle?



Obrázek 1: Počáteční stav v hlavolamu hanojské věže se třemi kolíky a osmi kotouči (převzato z Wikimedia Commons, `https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Tower_of_Hanoi.jpeg`)

Na první pohled není zřejmé, zda je úloha vůbec řešitelná. Budeme uvažovat obecnější verzi s n kotouči a 3 kolíky. Ukážeme, že úloha je řešitelná pro každé $n \in \mathbb{N}$ a najdeme minimální počet kroků a_n potřebných k přenesení n kotoučů z jednoho kolíku na jiný (počet kroků nezáleží na tom, který kolík je startovní a který cílový – známe-li postup pro přenesení věže z levého na pravý kolík, snadno jej upravíme např. na postup pro přenesení věže z levého na prostřední kolík).

Platí $a_1 = 1$ (přenášíme jediný kotouč) a $a_2 = 3$ (menší kotouč přeneseme z levého na prostřední kolík, následně větší kotouč z levého na pravý kolík a nakonec menší kotouč z prostředního na pravý kolík).

Klíčové pozorování: Pokud umíme vyřešit úlohu s $n-1$ kotouči, umíme též vyřešit úlohu s n kotouči: K tomu, abychom se vůbec dostali k největšímu kotouči a mohli jej přenést z levého kolíku na pravý, musíme nejprve přemístit vrchních $n-1$ kotoučů na prostřední kolík (k tomu je potřeba a_{n-1} kroků). Poté přeneseme největší kotouč z levého kolíku na pravý (1 krok) a zbývá přemístit $n-1$ kotoučů z prostředního kolíku na pravý (opět a_{n-1} kroků).[1] Je zřejmé, že žádný jednodušší způsob řešení neexistuje. Pokud navíc známe číslo a_{n-1}, pak předchozí úvaha dokazuje, že $a_n = a_{n-1} + 1 + a_{n-1}$, neboli

$$a_n = 2a_{n-1} + 1. \tag{1.1}$$

Pomocí této rekurentní rovnice sestavíme následující tabulku.

[1] Při přesouvání $n-1$ kotoučů nezáleží na tom, kde právě leží n-tý kotouč; je totiž největší a lze na něj položit libovolný jiný kotouč.

n	1	2	3	4	5	6	7	8
a_n	1	3	7	15	31	63	127	255

Vidíme, že k vyřešení úlohy s 8 kotouči je zapotřebí 255 kroků.

Nabízí se otázka, zda k výpočtu a_n pro velké hodnoty n je skutečně zapotřebí počítat všechny členy $a_1, \ldots, a_n$, nebo existuje jednodušší postup. Ve druhém řádku tabulky vidíme mocniny dvojky zmenšené o 1, zdá se tedy, že by obecně mohlo platit

$$a_n = 2^n - 1, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{1.2}$$

Dokážeme vzorec matematickou indukcí: Pro $n = 1$ vychází $2^1 - 1 = 1$, což se rovná a_1. Indukční krok: Platí-li $a_{n-1} = 2^{n-1} - 1$, pak z rekurentní rovnice (1.1) plyne

$$a_n = 2a_{n-1} + 1 = 2 \cdot (2^{n-1} - 1) + 1 = 2^n - 2 + 1 = 2^n - 1,$$

čímž je důkaz hotov.

Ke vzorci (1.2) lze dospět i jiným způsobem, aniž bychom jej uhodli. Přičteme-li k oběma stranám vztahu (1.1) jedničku, dostaneme

$$a_n + 1 = 2a_{n-1} + 2 = 2(a_{n-1} + 1).$$

Provedeme-li substituci $b_n = a_n + 1$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, získáme

$$b_n = 2b_{n-1}.$$

Tedy $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ je geometrická posloupnost s kvocientem 2. Její první člen je $b_1 = a_1 + 1 = 2$, tudíž platí $b_n = 2^n$ a následně $a_n = b_n - 1 = 2^n - 1$.

Vzorec (1.2) ukazuje, že počet kroků potřebných k vyřešení úlohy roste exponenciálně s počtem disků.

Poznámka: Hlavolam hanojské věže pochází z roku 1883 a je dodnes populární. V návodu, který se nacházel v krabičce, byl za jeho autora byl označen profesor N. Claus; jde o přesmyčku jména skutečného autora, francouzského matematika Édouarda Lucase. Existují různé verze hlavolamu, z nichž asi nejznámější je varianta se čtyřmi kolíky a n disky. Nejmenší počet kroků potřebných k vyřešení této úlohy lze vypočítat pomocí tzv. Frame-Stewartova algoritmu; ten je znám od roku 1941, avšak jeho správnost dokázal až francouzský matematik Thierry Bousch v roce 2014. Další informace o hanojských věžích včetně zdařilých animací jsou k dispozici na `https://en.wikipedia.org/wiki/Tower_of_Hanoi`.

2 Přímky v rovině

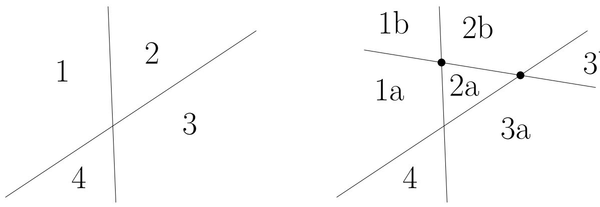
Jaký maximální počet oblastí může vzniknout, jestliže pomocí n přímek rozdělíme rovinu?

Nechť L_n je maximální počet oblastí roviny při sestrojení n přímek. Zřejmě platí $L_1 = 2$ (jedna přímka rozdělí rovinu na 2 oblasti) a $L_2 = 4$ (dvě různoběžky rozdělí rovinu na 4 oblasti, zatímco dvě rovnoběžky dají pouze 3 oblasti).

Představme si situaci, kdy v rovině je již nakresleno $n-1$ přímek. Pak n-tá přímka protne nejvýše $n-1$ dříve sestrojených přímek (může jich být méně, pokud je nová přímka rovnoběžná s některou dříve sestrojenou). Příslušné průsečíky vymezují na n-té přímce nejvýše n úseků (může jich být méně, pokud jsou některé průsečíky totožné) a každý takový úsek rozdělí některou stávající oblast roviny na dvě podoblasti. Při sestrojení n-té přímky tedy může vzniknout maximálně n nových oblastí; bude jich právě n, pokud přímky volíme tak, aby každé dvě byly různoběžné a žádné tři neměly společný bod.

Předchozí úvaha dokazuje, že pro $n \geq 2$ platí

$$L_n = L_{n-1} + n. \tag{2.1}$$



Obrázek 2: Dvě různoběžky dělí rovinu na 4 oblasti, tedy $L_2 = 4$ (vlevo). Třetí přímka protíná první i druhou; dva průsečíky na ní vymezují tři úseky. Každý úsek dělí některou stávající oblast roviny na dvě části, tudíž $L_3 = L_2 + 3 = 4 + 3 = 7$ (vpravo).

Zkusme najít vzorec pro n-tý člen této rekurentně zadané posloupnosti. Uhodnout vzorec na základě hodnot z tabulky je tentokrát obtížnější, proto budeme postupovat jinak. Opakovaným použitím vztahu (2.1) dostaneme

$$\begin{aligned} L_n &= L_{n-1} + n \\ &= L_{n-2} + (n-1) + n \\ &= L_{n-3} + (n-2) + (n-1) + n \\ &\dots \\ &= L_1 + 2 + 3 + \cdots + n \\ &= 2 + 2 + 3 + \cdots + n \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + 1, \end{aligned}$$

čímž je úloha vyřešena.

Poznámka: Úlohu poprvé vyřešil roku 1826 švýcarský matematik Jakob Steiner. Ekvivalentní formulace zní: Na jaký největší počet částí můžeme rozdělit pizzu nebo koláč pomocí n řezů? Souvislost s předchozí úlohou o přímkách je zřejmá: Stačí do obrázku zakreslit kružnici (znázorňující pizzu nebo koláč) tak, aby uvnitř ní ležely průsečíky všech přímek.

3 Úloha o zajatcích

n zajatcům čekajícím na popravu bylo nařízeno, aby se rozestavili do kruhu. Postupně bude popravován každý druhý zajatec tak dlouho, dokud nezůstane naživu poslední; tomu bude udělena milost. Zjistěte, který zajatec zůstane naživu.

Předpokládejme, že zajatci jsou očíslováni čísly $1, \dots, n$ v tom pořadí, ve kterém stojí v kruhu vedle sebe. Nechť $j(n)$ je číslo zajatce, který zůstane naživu.

Příklad (nakreslete si situaci v kruhu a vyškrtávejte popravované zajatce): Pro $n = 10$ jsou postupně popraveni zajatci s čísly 2, 4, 6, 8, 10, 3, 7, 1, 9 a přežije zajatec 5, tedy $j(10) = 5$.

Zřejmě platí $j(1) = j(2) = 1$. Pro $j(n)$, kde $n \geq 3$, odvodíme rekurentní rovnici.

- Je-li $n = 2k$ sudé, pak po provedení k poprav zbývá k zajatců s čísly $1, 3, \dots, 2k-1$. Převedli jsme tedy problém na úlohu stejného typu, ale menšího rozsahu. Ze zbylých k zajatců přežije ten na pozici $j(k)$; zajatci však nyní nejsou číslováni po sobě jdoucími přirozenými čísly, ale pouze lichými čísly. Číslo přeživšího zajatce je tedy $2j(k) - 1$.[2] Ukázali jsme, že platí

$$j(2k) = 2j(k) - 1. \tag{3.1}$$

[2]Protože i-tý prvek posloupnosti $1, 3, \dots, 2k-1$ je $2i - 1$.

- Podobně vyšetříme případ, kdy $n = 2k+1$ je liché. Po provedení $k+1$ poprav zbývá k zajatců s čísly $3, \ldots, 2k-1, 2k+1$.[3] Naživu zůstane $j(k)$-tý z nich a jeho číslo je $2j(k)+1$.[4] Platí tedy

$$j(2k+1) = 2j(k) + 1. \tag{3.2}$$

Pomocí rekurentních vztahů (3.1) a (3.2) lze postupně počítat hodnoty $j(n)$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$; prvních deset hodnot ukazuje následující tabulka.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$j(n)$	1	1	3	1	3	5	7	1	3	5

Pokud bychom chtěli znát např. $j(100)$, je výpočet pomocí tabulky zdlouhavý (a než bychom se dobrali k výsledku, může být na záchranu života pozdě). Zkusme tedy najít explicitní vzorec pro $j(n)$.

Z tabulky se zdá, že pokud n je mocninou dvojky, pak $j(n) = 1$.[5] Dále vidíme, že s každým zvýšením n o 1 vzroste $j(n)$ o 2, a to tak dlouho, dokud nenarazíme na další mocninu dvojky. Naše hypotéza tedy zní: Je-li $n = 2^m + l$, kde $l \in \{0, \ldots, 2^m - 1\}$, pak $j(n) = 2l + 1$.

Důkaz matematickou indukcí:

Pro $n = 1$ tvrzení platí: $1 = 2^0 + 0$, tedy $m = 0$, $l = 0$ a $2l + 1 = 1$, což se shoduje s hodnotou $j(1)$.

Předpokládejme, že hypotéza platí pro $1, \ldots, n-1$, a dokažme, že platí pro n.

- Nechť $n = 2^m + l$ je sudé, tj. $n = 2k$. Pak ze vztahu (3.1) a z indukčního předpokladu plyne

$$j(n) = j(2k) = 2j(k) - 1 = 2j(n/2) - 1 = 2j(2^{m-1} + l/2) - 1 = 2 \cdot (2 \cdot (l/2) + 1) - 1 = 2l + 1.$$

- Nechť $n = 2^m + l$ je liché, tj. $n = 2k+1$. Pak ze vztahu (3.2) a z indukčního předpokladu plyne

$$j(n) = j(2k+1) = 2j(k)+1 = 2j((n-1)/2)+1 = 2j(2^{m-1}+(l-1)/2)+1 = 2\cdot(2\cdot(l-1)/2+1)+1 = 2l+1.$$

Důkaz indukcí je hotov.

Zkusme vypočítat $j(100)$. Platí $100 = 64 + 36 = 2^6 + 36$, tedy $m = 6$, $l = 36$ a $j(100) = 2 \cdot 36 + 1 = 73$.

Poznámka: Úloha o zajatcích se v anglicky psané literatuře vyskytuje pod názvem „Josephus problem“ na počest učence Josefa Flavia, autora Židovské války, kde je vylíčen následující příběh: Roku 67 n. l. se Flavius se svými 40 židovskými spolubojovníky ocitl v obklíčení Římany. Když poznali, že nemají šanci vyváznout, rozhodli se raději pozabíjet. Flavius spolu s jedním dalším mužem ale měli štěstí, zůstali naživu jako poslední a zachránili si život tím, že se vzdali Římanům. Je nepravděpodobné, že by se Židé navzájem zabíjeli podle pravidel úlohy o zajatcích; sám Flavius píše, že o jeho záchraně rozhodl los. Zdá se, že teprve autoři středověkých a novověkých sbírek úloh spojili Flaviův příběh s matematickým problémem, aby jej učinili atraktivnějším. Další informace o této úloze a jejích variantách lze najít např. na webu `https://en.wikipedia.org/wiki/Josephus_problem` a v článku `http://dml.cz/dmlcz/143212`.

[3] Pokud bychom provedli pouze k poprav, zbylo by $k+1$ zajatců s čísly $1, 3, \ldots, 2k-1, 2k+1$. Tím bychom problém převedli na úlohu menšího rozsahu, ale nikoliv stejného typu jako na začátku, protože popravování dále pokračuje zajatcem na první, nikoliv na druhé pozici.

[4] Protože i-tý prvek posloupnosti $3, \ldots, 2k+1$ je $2i+1$.

[5] To lze snadno zdůvodnit. V každém kole jsou popravováni zajatci na sudých pozicích, první zajatec tedy zůstane naživu až do konce.