

Matematická analýza V – požadavky ke zkoušce (ZS 2021/22)

1. Teorie míry

Vnější Lebesgueova míra a její vlastnosti (věta s důkazem). Lebesgueovsky měřitelné množiny a Lebesgueova míra (definice). Otevřené a nulové množiny jsou měřitelné, posunutí měřitelné množiny je měřitelná množina (tři věty s důkazem). Spočetné sjednocení lebesgueovsky měřitelných množin je lebesgueovsky měřitelná množina (důkaz). Uzavřené množiny jsou lebesgueovsky měřitelné (bez důkazu). Doplněk lebesgueovsky měřitelné množiny je lebesgueovsky měřitelný (bez důkazu), Lebesgueova míra je σ -aditivní (bez důkazu). σ -algebry a jejich vlastnosti (definice a věta s důkazem), prostory s mírou a jejich vlastnosti (definice a věta s důkazem).

2. Měřitelné funkce

Měřitelné funkce, ekvivalentní definice měřitelnosti (věta s důkazem). Měřitelnost spojitě funkce a složené funkce (dvě věty s důkazem, pomocná lemmata stačí znát bez důkazu). Operace, které zachovávají měřitelnost funkcí (dvě věty s důkazem). Infimum a suprémum posloupnosti měřitelných funkcí jsou měřitelné (důkaz), limita posloupnosti měřitelných funkcí je měřitelná (bez důkazu).

3. Lebesgueův integrál

Jednoduchá funkce, integrál jednoduché nezáporné funkce a jeho vlastnosti (věta s důkazem). Aproximace nezáporné měřitelné funkce jednoduchými funkcemi (věta s důkazem). Integrál nezáporné měřitelné funkce a jeho vlastnosti (věta s důkazem). Leviho věta pro neklesající posloupnosti nezáporných funkcí (důkaz). Integrál ze součtu funkcí (věta s důkazem). Leviho věta o záměně pořadí sumy a integrálu (důkaz). Integrál obecné měřitelné funkce, nutná a postačující podmínka pro konvergenci integrálu (důkaz), odhad absolutní hodnoty integrálu (důkaz). Vlastnosti Lebesgueova integrálu: integrace přes nulové množiny, integrál násobku a součtu, monotonie integrálu (čtyři věty s důkazy). Pojem „skoro všude“ a výsledky s ním související (věta s důkazem). Leviho věta o monotónní konvergenci (důkaz), Fatouovo lemma (důkaz), Lebesgueova věta o dominované konvergenci (důkaz), Lebesgueova věta o záměně pořadí sumy a integrálu (důkaz). Srovnávací a limitní srovnávací kritérium (dvě věty s důkazem). Vztah Riemannova, Newtonova a Lebesgueova integrálu (dvě věty bez důkazu). Spojitá závislost integrálu na parametru, derivace integrálu podle parametru (dvě věty s důkazem). Integrál z komplexní funkce (definice) a jeho absolutní hodnota (věta s důkazem). L^p norma, prostory L^p a jejich vlastnosti (věta s důkazem, pomocné lemma stačí znát bez důkazu). Skalární součin v L^2 (definice). Cauchyovské posloupnosti v prostoru L^p a jejich vlastnosti (bez důkazu). Fubiniho věta pro nezáporné funkce a pro obecné funkce (dvě věty bez důkazu). Věta o substituci pro otevřené množiny (náznak důkazu pro spojitě funkce) a pro obecné množiny (bez důkazu). Integrace funkcí vzhledem k aritmetické míře (věta s důkazem), Minkowského nerovnost pro vektory a posloupnosti (věta s důkazem).

Definice je potřeba umět ilustrovat na příkladech. Důkazům je nutné rozumět, tj. umět odůvodnit jednotlivé kroky (nikoliv je pouze znát z paměti).