Abstraktní prostory

Antonín Slavík
Matematicko-fyzikální fakulta UK

1 Definice abstraktních prostorů

K základní pojmům klasické matematické analýzy tak, jak byla studována do začátku 20. století, patří zejména:

- Posloupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ a nekonečné řady $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, kde x_n jsou reálná nebo komplexní čísla. Klíčovou otázkou je konvergence takovýchto posloupností a řad.
- Funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$. Klíčovými pojmy jsou limita funkce, spojitost, derivace, integrál.

Moderní matematická analýza tyto pojmy zobecňuje a pracuje s následujícími objekty:

- Posloupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ a nekonečné řady $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, kde x_n jsou prvky abstraktního prostoru.
- Funkce $f : X \to Y$, kde X, Y jsou abstraktní prostory.

Co přesně znamená pojem „abstraktní prostor“? V analýze se nejčastěji setkáme se třemi druhy prostorů:

- Metrické prostory, tj. prostory, ve kterých umíme měřit vzdálenosti bodů. To umožňuje zavést pojmy jako limita a spojitost.
- Normované lineární (vektorové) prostory, kde umíme sčítat a odčítat vektory, násobit je skaláry, ale též měřit velikosti vektorů pomocí normy. To umožňuje definovat pojmy jako součet nekonečné řady, derivace, integrál.
- Prostory se skalárním součinem, kde navíc můžeme měřit úhly mezi vektory a používat Pýthagorovu větu. Již víme, že tyto prostory jsou vhodné např. ke studiu Fourierových řad.

Proč je výhodné pracovat s abstraktními prostory?

- Je možné zavést jednotné definice základních pojmů. Nemusíme např. zvlášť definovat spojitost pro funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ a $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$, protože se jedná o speciální případy obecné definice spojitosti pro zobrazení mezi metrickými prostory.
- Chceme rozšířit pojmy jako je limita, spojitost, součet nekonečné řady apod. tak, aby dávaly smysl nejen v $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{C}^n$, ale i v nekonečnědimenzionálních prostorech, jako jsou prostory posloupností a prostory funkcí.

Začneme definicemi všech tří druhů abstraktních prostorů.

Definice 1.1. *Metrický prostor* je libovolná množina $X \neq \emptyset$, na které je definována funkce $d : X \times X \to \mathbb{R}$ (metrika) splňující následující požadavky:

1. $\forall x, y \in X \; d(x, y) \geq 0$

2. $d(x, y) = 0 \iff x = y$

3. $\forall x, y \in X\ d(x, y) = d(y, x)$

4. $\forall x, y, z \in X\ d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (trojúhelníková nerovnost pro metriku)

Definice 1.2. *Normovaný lineární prostor* (nebo též *normovaný vektorový prostor*) je libovolný vektorový prostor X nad $\mathbb{R}$, na kterém je definována funkce $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ (norma) splňující následující požadavky:

1. $\forall x \in X\ \|x\| \geq 0$

2. $\|x\| = 0 \iff x = 0$ (používáme stejné označení pro nulový vektor v X a pro číslo nula, význam je zřejmý z kontextu)

3. $\forall a \in \mathbb{R}\ \forall x \in X\ \|ax\| = |a|\,\|x\|$

4. $\forall x, y \in X\ \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (trojúhelníková nerovnost pro normu)

Definice 1.3. *Prostor se skalárním součinem* je libovolný vektorový prostor X nad $\mathbb{R}$, na kterém je definována funkce $\cdot : X \times X \to \mathbb{R}$ (skalární součin) splňující následující požadavky:

1. $\forall x \in X\ x \cdot x \geq 0$

2. $x \cdot x = 0 \iff x = 0$

3. $\forall x, y \in X\ x \cdot y = y \cdot x$

4. $\forall a, b \in \mathbb{R}\ \forall x, y, z \in X\ (ax + by) \cdot z = a(x \cdot z) + b(y \cdot z)$

Často se pracuje i s vektorovými prostory nad tělesem komplexních čísel. V definici normovaného lineárního prostoru pak podmínka 3 musí platit pro každé $a \in \mathbb{C}$, v definici prostoru se skalárním součinem je podmínka 3 nahrazena podmínkou $x \cdot y = \overline{y \cdot x}$.

Následující dvě věty ukazují, že každý normovaný lineární prostor je zároveň metrický prostor, a každý prostor se skalárním součinem je též normovaný lineární prostor.

Věta 1.4. *Je-li X normovaný lineární prostor, pak funkce $d : X \times X \to \mathbb{R}$ definovaná předpisem*

$$d(x, y) = \|x - y\|, \quad x, y \in X,$$

je metrika na X.

Důkaz. Podmínky 1, 2, 3 z definice metriky se snadno ověří pomocí podmínek 1, 2, 3 z definice normy. Trojúhelníková nerovnost pro metriku plyne z trojúhelníkové nerovnosti pro normu:

$$d(x, y) = \|x - y\| = \|x - z + z - y\| \leq \|x - z\| + \|z - y\| = d(x, z) + d(z, y). \qquad \square$$

Věta 1.5. *Je-li X prostor se skalárním součinem, pak funkce $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ definovaná předpisem*

$$\|x\| = \sqrt{x \cdot x}, \quad x \in X,$$

je norma na X.

Důkaz. Podmínky 1, 2, 3 z definice normy se snadno ověří pomocí podmínek 1, 2, 3, 4 z definice skalárního součinu. K ověření trojúhelníkové nerovnosti pro normu využijeme Cauchyovu-Schwarzovu nerovnost $|x \cdot y| \leq \|x\|\,\|y\|$, která platí v každém prostoru se skalárním součinem (viz přednášku z lineární algebry):

$$\|x + y\|^2 = (x + y) \cdot (x + y) = x \cdot x + x \cdot y + y \cdot x + y \cdot y \leq \|x\|^2 + 2\|x\|\,\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2. \qquad \square$$

2 Příklady prostorů

Příklad 2.1. Nejjednodušími příklady prostorů se skalárním součinem jsou $\mathbb{R}^n$, resp. $\mathbb{C}^n$. Skalární součin dvou vektorů $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ a $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{C}^n$ je

$$x \cdot y = \sum_{i=1}^{n} x_i \, \overline{y_i}.$$

Tento skalární součin podle věty 1.5 určuje následující (tzv. eukleidovskou) normu:

$$\|x\| = \sqrt{x \cdot x} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}$$

(pro reálné vektory lze vynechat absolutní hodnotu). Věta 1.4 pak udává způsob, jak lze zavést (tzv. eukleidovskou) metriku:

$$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2}.$$

To však není jediný způsob, jak definovat normu (a tím pádem i metriku) na $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{C}^n$. Další možnosti jsou např. maximová (suprémová) norma

$$\|x\|_\infty = \max(|x_1|, \dots, |x_n|)$$

nebo součtová norma

$$\|x\|_1 = |x_1| + \dots + |x_n|.$$

Obecněji, pro každé $p \in [1, \infty)$ je předpisem

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p} \tag{2.1}$$

definována norma na $\mathbb{R}^n$ nebo $\mathbb{C}^n$. Je zřejmé, že podmínky 1, 2, 3 z definice normy jsou splněny. Trojúhelníková nerovnost z podmínky 4 má tvar

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p \right)^{1/p} \le \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p \right)^{1/p}$$

a nazývá se Minkowského nerovnost. Její důkaz je poněkud pracný a nebudeme jej provádět.[1]

Eukleidovská norma a součtová norma jsou speciálními případy normy (2.1) pro $p = 2$ a $p = 1$. Maximová norma je limitou normy (2.1) pro $p \to \infty$: Pro každé $x \in \mathbb{C}^n$ platí

$$(\|x\|_\infty)^p = \max(|x_1|^p, \dots, |x_n|^p) \le \sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \le n \, \max(|x_1|^p, \dots, |x_n|^p),$$

a tudíž

$$\|x\|_\infty \le \|x\|_p \le n^{1/p} \, \|x\|_\infty.$$

Levá i pravá strana mají pro $p \to \infty$ limitu $\|x\|_\infty$, a proto $\lim_{p \to \infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$, čímž je zdůvodněno značení maximové normy.

Není-li řečeno jinak, pak na $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{C}^n$ uvažujeme eukleidovskou normu. Chceme-li na $\mathbb{R}^n$ pracovat s normou (2.1), pak místo $\mathbb{R}^n$ obvykle píšeme ℓ_n^p, zatímco $\mathbb{R}^n$ s maximovou normou se zkráceně značí ℓ_n^∞.

[1] Viz např. I. Netuka: *Základy moderní analýzy*, Matfyzpress, 2014 (tvrzení 1.10.4) nebo lemma 12.2.9 v textu J. Veselého na `http://www.karlin.mff.cuni.cz/~slavik/ma6/jv12.pdf`. Jinou možností je využít postupu naznačeného ve druhé poznámce pod čarou.

Příklad 2.2. Na posloupnosti lze nahlížet jako na vektory s nekonečně mnoha složkami. Je tedy přirozené pokusit se definovat normu posloupnosti předpisem

$$\|\{x_i\}_{i=1}^{\infty}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2}. \tag{2.2}$$

V definici normy se však požaduje, aby jejími hodnotami byla pouze reálná čísla, proto je nutné omezit se na posloupnosti splňující podmínku $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 < \infty$. Obecněji, pro každé $p \in [1, \infty)$ definujeme prostor ℓ^p jako prostor všech posloupností splňujících podmínku $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < \infty$ a příslušná norma je pak dána předpisem

$$\|\{x_i\}_{i=1}^{\infty}\|_p = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p\right)^{1/p}. \tag{2.3}$$

Mezi všemi prostory ℓ^p má důležité místo prostor ℓ^2, na kterém je definován skalární součin

$$\{x_i\}_{i=1}^{\infty} \cdot \{y_i\}_{i=1}^{\infty} = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \, \overline{y_i} \tag{2.4}$$

(z tohoto skalárního součinu pak pomocí věty 1.5 dostaneme normu (2.2)). Nekonečnědimenzionální verzí prostoru ℓ_n^{∞} je prostor ℓ^{∞} tvořený všemi omezenými posloupnostmi, na kterém uvažujeme suprémovou normu

$$\|\{x_i\}_{i=1}^{\infty}\|_{\infty} = \sup_{i \in \mathbb{N}} |x_i|. \tag{2.5}$$

Příklad 2.3. Vektorový prostor tvořený všemi konvergentními posloupnostmi se značí c. Jeho podprostorem je prostor c_0 tvořený všemi posloupnostmi, které mají nulovou limitu. Platí

$$c_0 \subset c \subset \ell^{\infty},$$

neboť každá konvergentní posloupnost je omezená. V prostorech c a c_0 tedy můžeme pracovat se suprémovou normou z ℓ^{∞}.

Příklad 2.4. V teorii Lebesgueova integrálu hrají důležitou roli následující prostory funkcí: Pro každé $p \in [1, \infty)$ definujeme

$$L^p(X, \mu) = \{f : X \to \mathbb{C} : f \text{ je měřitelná a } \int_X |f|^p \, \mathrm{d}\mu < \infty\}.$$

Pro každou $f \in L^p(X, \mu)$ pak položíme

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p \, \mathrm{d}\mu\right)^{1/p}.$$

Funkce $\|\cdot\|_p$ splňuje podmínky 1, 3, 4 z definice normy, avšak nesplňuje podmínku 2: Z $\|f\|_p = 0$ neplyne $f = 0$, ale pouze $f(x) = 0$ pro skoro všechna $x \in X$. Zavádíme proto úmluvu, že funkce rovnající se skoro všude považujeme za totožné. Prvky prostoru $L^p(X, \mu)$ tedy vlastně nejsou funkce, ale třídy ekvivalentních funkcí.

V teorii Fourierových řad je důležitý prostor $L^2(X, \mu)$, který má mezi prostory L^p výjimečné postavení, jde totiž o prostor se skalárním součinem

$$f \cdot g = \int_X f(x)\overline{g(x)} \, \mathrm{d}\mu.$$

Tomuto skalárnímu součinu odpovídá norma

$$\|f\|_2 = \sqrt{f \cdot f} = \sqrt{\int_X |f(x)|^2 \, \mathrm{d}\mu}.$$

Míra μ je nejčastěji Lebesgueova míra a v tomto případě pak místo $L^p(X, \mu)$ píšeme stručně $L^p(X)$.

Pokud za μ vezmeme tzv. aritmetickou míru, která každé množině přiřadí počet jejích prvků, pak integrál funkce $f : \{1, \ldots, n\} \to \mathbb{R}$ vzhledem k aritmetické míře je součet $\sum_{i=1}^{n} f(i)$. Prostor $L^p(\{1, \ldots, n\}, \mu)$ pak není nic jiného, než prostor ℓ_n^p zavedený v příkladu 2.1. Podobně prostor $L^p(\mathbb{N}, \mu)$ se shoduje s prostorem posloupností ℓ^p z příkladu 2.2.[2]

Příklad 2.5. V analýze se často pracuje ještě s jiným prostorem funkcí: $C([a, b])$ je prostor všech spojitých reálných (případně komplexních) funkcí definovaných na $[a, b]$. Na tomto prostoru uvažujeme suprémovou normu

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|$$

(ze spojitosti f plyne, že suprémum je konečné číslo). Této normě pak odpovídá metrika

$$d(f, g) = \sup_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)|,$$

pomocí které měříme vzdálenost dvou spojitých funkcí na $[a, b]$.

Každá spojitá funkce $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ je zároveň prvkem prostoru $L^p([a, b])$, protože integrál spojité funkce na omezeném uzavřeném intervalu (který existuje i jako Riemannův integrál) je konečné číslo. Platí tedy $C([a, b]) \subset L^p([a, b])$, je však třeba mít na paměti, že v těchto prostorech pracujeme s odlišnými normami.

Příklad 2.6. Nechť X je libovolná neprázdná množina. Definujme $d(x, y) = 0$ pokud $x = y$ a $d(x, y) = 1$ v opačném případě. Pak d je metrika (ověřte podmínky z definice metriky) a hovoříme o tzv. diskrétním metrickém prostoru na množině X. Uvidíme, že tento prostor má poněkud zvláštní vlastnosti a často se používá jako protipříklad na nejrůznější hypotézy o metrických prostorech.

3 Cvičení

Cvičení 3.1. Pro jaká $p \in [1, \infty)$ platí, že funkce $f(x) = 1/x$ je prvkem prostoru $L^p([1, \infty))$?

Cvičení 3.2. Pro jaká $p \in [1, \infty)$ platí, že funkce $f(x) = 1/\sqrt{x}$ je prvkem prostoru $L^p((0, 1))$?

Cvičení 3.3. Pro jaká $p \in [1, \infty]$ platí, že posloupnost $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ je prvkem prostoru ℓ^p? Je prvkem c a c_0?

Cvičení 3.4. Nechť $q > 1$ je jisté reálné číslo. Najděte příklad reálné posloupnosti, která neleží v prostoru ℓ^q, ale leží v ℓ^p pro každé $p > q$.

Cvičení 3.5. Ukažte, že pokud $p \in (0, 1)$, pak funkce

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p}$$

není norma na prostoru $\mathbb{R}^n$, kde $n \geq 2$. (Najděte příklad ukazující, že některá z podmínek v definici normy je porušena.)

Cvičení 3.6. a) Dokažte, že pokud v libovolném prostoru X se skalárním součinem definujeme normu předpisem $\|x\| = \sqrt{x \cdot x}$, pak platí tzv. rovnoběžníkové pravidlo

$$\forall x, y \in X \quad \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Jaká je jeho geometrická interpretace v $\mathbb{R}^2$?

[2] V příkladech 2.1 a 2.2 jsme neověřili, že vztahy (2.1) a (2.3) splňují všechny podmínky z definice normy (netriviální je pouze trojúhelníková nerovnost). Nyní vidíme, že tyto podmínky stačí ověřit pro $L^p(X, \mu)$, což bylo provedeno v Matematické analýze V.

b) Pro každé $p \geq 1$, $p \neq 2$ najděte vektory $x, y \in \ell_n^p$, $n \geq 2$, které nesplňují rovnoběžníkové pravidlo, tj.

$$\|x+y\|_p^2 + \|x-y\|_p^2 \neq 2(\|x\|_p^2 + \|y\|_p^2).$$

Z toho plyne, že v prostoru ℓ_n^p s výjimkou $p = 2$ nelze definovat skalární součin, ze kterého by byla odvozena norma $\|\cdot\|_p$.

Řešení:

1. $p \in (1, \infty)$.

2. $p \in [1, 2)$.

3. $p \in (1, \infty]$. Je prvkem c a c_0.

4. Například $\{\frac{1}{n^{1/q}}\}_{n=1}^{\infty}$.

5. Zvolme např. $x = (1, 0, \ldots)$ a $y = (0, 1, \ldots)$, tj. první dva vektory kanonické báze. Pak pro $p \in (0, 1)$

$$\|x+y\|_p = 2^{1/p} > 2 = \|x\|_p + \|y\|_p,$$

tj. neplatí trojúhelníková nerovnost.

6. Pro důkaz rovnoběžníkového pravidla stačí roznásobit $(x+y)\cdot(x+y)+(x-y)\cdot(x-y)$. V $\mathbb{R}^2$ pravidlo říká, že součet obsahů čtverců nad stranami rovnoběžníku je roven součtu obsahů čtverců nad úhlopříčkami. K nalezení protipříkladu pro $p \in [1, \infty) \setminus \{2\}$ stačí opět volit vektory kanonické báze, $x = (1, 0, \ldots)$ a $y = (0, 1, \ldots)$. Pak vyjde

$$\|x+y\|_p^2 + \|x-y\|_p^2 = 2^{2/p+1} \neq 4 = 2(\|x\|_p^2 + \|y\|_p^2).$$