Cesàrovská sčítatelnost řad a Fejérova věta

Antonín Slavík
Matematicko-fyzikální fakulta UK

1 Cesàrovská sčítatelnost řad

Je-li dána nekonečná řada reálných či komplexních čísel $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$, pak její součet je definován jako limita částečných součtů

$$s_n = a_0 + \cdots + a_n, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

za předpokladu, že tato limita existuje.

Například řada

$$1 - 1 + 1 - 1 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k$$

diverguje, protože $s_n = 1$ pro sudá n a $s_n = 0$ pro lichá n. Jelikož však částečné součty pravidelně oscilují kolem hodnoty 1/2, mohlo by se zdát „spravedlivé“ prohlásit tuto hodnotu za součet řady. Tuto myšlenku vyjadřuje následující definice.

Definice 1.1. Řekneme, že řada $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ je cèsarovsky sčítatelná k součtu σ, jestliže průměry jejích částečných součtů konvergují k σ, tj. platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{s_0 + \cdots + s_n}{n+1} = \sigma.$$

Příklad 1.2. Pro výše uvedenou řadu $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k$ máme

$$s_0 + \cdots + s_n = 1 + 0 + 1 + 0 + \cdots = \begin{cases} \frac{n+1}{2} & \text{pro } n \text{ liché}, \\ \frac{n}{2} + 1 & \text{pro } n \text{ sudé}. \end{cases}$$

Odsud je vidět, že

$$\lim_{n\to\infty} \frac{s_0 + \cdots + s_n}{n+1} = \frac{1}{2},$$

tj. řada je cèsarovsky sčítatelná k součtu 1/2.

Zmíněná metoda sčítání řad je pojmenována na počet italského matematika Ernesta Cesàra (1859–1906) a umožňuje přiřadit součet některým řadám, které jsou v obvyklém smyslu divergentní. Zároveň platí, že pokud $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = s$, pak také

$$\lim_{n\to\infty} \frac{s_0 + \cdots + s_n}{n+1} = s,$$

neboli cèsarovský součet konvergentní řady se shoduje s jejím klasickým součtem (viz např. Theorem 1 na webu `http://mathonline.wikidot.com/the-cesaro-summability-of-a-series`).

Cvičení 1.3. Ukažte, že pro $x \neq k \cdot 2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, je řada

$$\sin x + \sin(2x) + \sin(3x) + \cdots$$

cèsarovsky sčítatelná k součtu $\frac{1}{2}\operatorname{cotg} \frac{x}{2}$ (přestože je divergentní v klasickém smyslu).

Návod: Částečný součet $\sin x + \cdots + \sin(nx)$ je imaginární částí součtu $e^{ix} + \cdots + e^{inx}$, což je součet konečné geometrické posloupnosti. Další nápovědu můžete najít na webu `https://math.stackexchange.com/questions/1728014/ces%c3%a0ro-sum-of-the-series-sin-x-sin-2x-sin-3x-ldots-frac12-cot`.

2 Fejérova věta

Cesàrovu sčítací metodu značně zpopularizovalo její využití v teorii Fourierových řad, které si nyní ukážeme.

Na přednášce bylo zmíněno, že pro 2π-periodickou funkci $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ není spojitost postačující podmínkou k tomu, aby Fourierova řada konvergovala ve všech bodech k f (to lze doložit příklady, které však nejsou zcela triviální). Fejérova věta (pojmenovaná podle maďarského matematika Lipóta Fejéra (1880–1959)) tvrdí, že pokud místo limity částečných součtů Fourierovy řady

$$s_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k) e^{ikx}$$

budeme uvažovat limitu jejich průměrů

$$\sigma_n(x) = \frac{s_0(x) + \dots + s_n(x)}{n+1},$$

tj. pokud použijeme Cesàrovu sčítací metodu, pak platí

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n(x) = f(x)$$

pro každé $x \in \mathbb{R}$ a tato konvergence je dokonce stejnoměrná.

Věta 2.1 (Fejérova věta)**.** *Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ je 2π-periodická funkce splňující $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)| \,\mathrm{d}x < \infty$, neboli $f \in L^1([-\pi, \pi])$. Je-li f spojitá v bodě $x \in \mathbb{R}$, pak $\lim_{n\to\infty} \sigma_n(x) = f(x)$. Pokud je f spojitá ve všech bodech, pak posloupnost funkcí $\{\sigma_n\}_{n=0}^{\infty}$ je stejnoměrně konvergentní k funkci f.*

Z přednášky víme (viz důkaz Dirichletovy věty o bodové konvergenci Fourierovy řady), že částečné součty Fourierovy řady lze vyjádřit ve tvaru

$$s_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(x-t) \,\mathrm{d}t,$$

kde $D_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikt}$, $t \in \mathbb{R}$, je tzv. Dirichletovo jádro.

Zavedeme-li substituci $u = x - t$ a využijeme toho, že f i D_n jsou 2π-periodické funkce, můžeme vzorec pro s_n upravit do tvaru

$$s_n(x) = -\frac{1}{2\pi} \int_{x+\pi}^{x-\pi} f(x-u) D_n(u) \,\mathrm{d}u = \frac{1}{2\pi} \int_{x-\pi}^{x+\pi} f(x-u) D_n(u) \,\mathrm{d}u = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-u) D_n(u) \,\mathrm{d}u.$$

Pro průměry částečných součtů pak platí

$$\sigma_n(x) = \frac{s_0(x) + \dots + s_n(x)}{n+1} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-u) \frac{D_0(u) + \dots + D_n(u)}{n+1} \,\mathrm{d}u. \tag{2.1}$$

Pro zjednodušení zápisu označíme

$$K_n(u) = \frac{D_0(u) + \dots + D_n(u)}{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad u \in \mathbb{R},$$

a tuto funkci budeme nazývat Fejérovo jádro. Následující lemma shrnuje jeho vlastnosti, které budeme potřebovat k důkazu Fejérovy věty.

Lemma 2.2. *Fejérovo jádro má následující vlastnosti:*

(i) Pro každé $n \in \mathbb{N}_0$ platí $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(x) \,\mathrm{d}x = 1$.

(ii) Je-li $n \in \mathbb{N}_0$ *a* $x \neq k \cdot 2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, *pak*

$$K_n(x) = \frac{1}{n+1}\left(\frac{\sin\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}\right)^2.$$

(iii) Pro každé $\delta \in (0, \pi)$ *platí, že posloupnost funkcí* $\{K_n\}_{n=0}^{\infty}$ *je na množině* $[-\pi, -\delta] \cup [\delta, \pi]$ *stejnoměrně konvergentní k nulové funkci.*

Důkaz. Tvrzení (i) plyne z definice Fejérova jádra a z toho, že pro každé $k \in \mathbb{N}_0$ platí $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_k(x)\,\mathrm{d}x = 1$, což bylo dokázáno na přednášce. Z přednášky dále víme, že pro $x \neq k \cdot 2\pi$ platí

$$D_n(x) = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{\sin\frac{x}{2}},$$

tudíž

$$K_n(x) = \frac{1}{n+1}\frac{\sin\frac{1}{2}x + \sin\frac{3}{2}x + \cdots + \sin(n+\frac{1}{2})x}{\sin\frac{x}{2}}.$$

K důkazu tvrzení (ii) tedy stačí ověřit, že

$$\sin\frac{1}{2}x + \sin\frac{3}{2}x + \cdots + \sin(n+\frac{1}{2})x = \frac{(\sin\frac{n+1}{2}x)^2}{\sin\frac{x}{2}}.$$

Tento úkol přenecháváme čtenáři – stačí si všimnout, že levá strana je imaginární složkou výrazu

$$e^{ix/2} + e^{3ix/2} + \cdots + e^{i(n+\frac{1}{2})x},$$

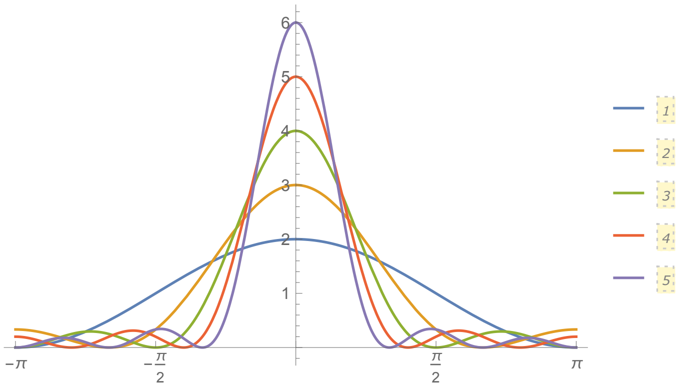
což je součet konečné geometrické posloupnosti.

Pro důkaz tvrzení (iii) si stačí uvědomit, že z tvrzení (ii) plyne odhad

$$0 \leq K_n(x) \leq \frac{1}{n+1}\frac{1}{\left(\sin\frac{\delta}{2}\right)^2}, \quad x \in [-\pi, -\delta] \cup [\delta, \pi].$$

□

První část lemmatu 2.2 říká, že průměrná hodnota Fejérova jádra je 1 (stejně jako průměrná hodnota Dirichletova jádra). Vzorec z části (ii) jsme využili v důkazu části (iii) a dále jej nebudeme potřebovat; postačí nám skutečnost, že Fejérovo jádro je nezáporné. Část (iii) říká, že velké hodnoty K_n se koncentrují pouze v okolí 0, viz obr. 1.



Obrázek 1: Fejérovo jádro K_n pro $n = 1, \ldots, 5$

S těmito poznatky již není Fejérova věta překvapivá, neboť vidíme, že v integrálu $\int_{-\pi}^{\pi} f(x-u)K_n(u)\,\mathrm{d}u$, který vystupuje ve vztahu (2.1), hrají podstatnou roli pouze funkční hodnoty $f(x-u)$ pro u blízké k nule, tedy hodnoty blízké k $f(x)$.

Důkaz věty 2.1: Nechť $x \in \mathbb{R}$ je bod, ve kterém je f spojitá. Volme libovolné $\varepsilon > 0$. Pak existuje $\delta > 0$ takové, že

$$|f(x-u) - f(x)| < \varepsilon, \quad u \in [-\delta, \delta].$$

Podle lemmatu 2.2 (iii) dále existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$|K_n(u)| \leq \varepsilon, \quad n \geq n_0, \quad u \in [-\pi, -\delta] \cup [\delta, \pi].$$

S využitím lemmatu 2.2 (i) dostaneme

$$|\sigma_n(x) - f(x)| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-u) K_n(u)\, \mathrm{d}u - f(x) \right| =$$

$$= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-u) K_n(u)\, \mathrm{d}u - f(x) \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(u)\, \mathrm{d}u \right| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} (f(x-u) - f(x)) K_n(u)\, \mathrm{d}u \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x-u) - f(x)| \cdot |K_n(u)|\, \mathrm{d}u =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} |f(x-u) - f(x)| \cdot |K_n(u)|\, \mathrm{d}u + \frac{1}{2\pi} \int_{[-\pi,-\delta]\cup[\delta,\pi]} |f(x-u) - f(x)| \cdot |K_n(u)|\, \mathrm{d}u.$$

V prvním sčítanci na pravé straně máme $|f(x-u) - f(x)| \leq \varepsilon$, a proto

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} |f(x-u) - f(x)| \cdot |K_n(u)|\, \mathrm{d}u \leq \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} |K_n(u)|\, \mathrm{d}u \leq \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(u)\, \mathrm{d}u = \varepsilon.$$

Ve druhém sčítanci máme pro $n \geq n_0$ odhad $|K_n(u)| \leq \varepsilon$, a proto

$$\frac{1}{2\pi} \int_{[-\pi,-\delta]\cup[\delta,\pi]} |f(x-u) - f(x)| \cdot |K_n(u)|\, \mathrm{d}u \leq \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_{[-\pi,-\delta]\cup[\delta,\pi]} (|f(x-u)| + |f(x)|)\, \mathrm{d}u \leq$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(x-u)|\, \mathrm{d}u + 2\pi |f(x)| \right) = \varepsilon \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(u)|\, \mathrm{d}u + |f(x)| \right).$$

Dokázali jsme tedy, že pro $n \geq n_0$ platí

$$|\sigma_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \left(1 + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(u)|\, \mathrm{d}u + |f(x)| \right).$$

Jelikož x je pevně zvoleno ε může být libovolně malé, platí $\lim_{n\to\infty} \sigma_n(x) = f(x)$.

Je-li f spojitá na $\mathbb{R}$ a zároveň 2π-periodická, pak existuje $M > 0$ takové, že $|f(x)| \leq M$ pro každé $x \in \mathbb{R}$. Dostáváme tedy odhad

$$|\sigma_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \left(1 + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(u)|\, \mathrm{d}u + M \right), \quad n \geq n_0,$$

jehož pravá strana nezávisí na x. Tím je dokázáno, že $\{\sigma_n\}_{n=0}^{\infty}$ konverguje stejnoměrně k f.

3 Aproximace trigonometrickými polynomy

Fejérova věta je zajímavá sama o sobě, kromě toho z ní však plyne následující věta, kterou jsme na přednášce používali bez důkazu.

Věta 3.1. *Je-li $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ spojitá 2π-periodická funkce, pak pro každé $\varepsilon > 0$ existuje komplexní trigonometrický polynom T takový, že $|f(x) - T(x)| < \varepsilon$ pro každé $x \in \mathbb{R}$.*

Důkaz. Podle Fejérovy věty posloupnost $\{\sigma_n\}_{n=0}^{\infty}$ konverguje stejnoměrně k f. Existuje tedy $n \in \mathbb{N}$ takové, že $|f(x) - \sigma_n(x)| < \varepsilon$ pro každé $x \in \mathbb{R}$. Nyní stačí volit $T = \sigma_n$ a uvědomit si, že se jedná o komplexní trigonometrický polynom. To plyne ze skutečnosti, že $s_0, \ldots, s_n$ jsou komplexní trigonometrické polynomy, a tedy i jejich průměr je komplexní trigonometrický polynom. □

Zájemcům o historii Fourierových řad doporučuji pěkný článek *Jedno fourierovské výročí* dostupný na webu `https://dml.cz/handle/10338.dmlcz/141368`.