Klasifikace bodů v metrických prostorech

Antonín Slavík
Matematicko-fyzikální fakulta UK

Pokračujeme ve výkladu o metrických prostorech a v celém textu předpokládáme, že X je metrický prostor s metrikou d. Zavedeme některé pojmy, které charakterizují vztah bodu $x \in X$ k množině $M \subset X$, a ilustrujeme je na jednoduchých příkladech.

1 Vnitřní, vnější a hraniční body

Definice 1.1. Nechť je dána množina $M \subset X$.

- Bod $x \in X$ se nazývá *vnitřním bodem* množiny M, pokud existuje $r > 0$ takové, že $B_r(x) \subset M$.
- Bod $x \in X$ se nazývá *vnějším bodem* množiny M, pokud existuje $r > 0$ takové, že $B_r(x) \subset X \setminus M$.
- Bod $x \in X$ je *hraničním bodem* množiny M, pokud není jejím vnitřním ani vnějším bodem.
- *Vnitřek* množiny M je množina všech jejích vnitřních bodů, značí se M°.
- *Hranice* množiny M je množina všech jejích hraničních bodů, značí se ∂M.
- *Uzávěr* množiny M je množina $\overline{M} = M \cup \partial M$.

Příklad 1.2. Nechť $X = \mathbb{R}$ se standardní eukleidovskou metrikou a $M = [0, 1)$. Vnitřními body M jsou všechny body z intervalu $(0, 1)$, vnějšími body jsou všechny body z $(-\infty, 0) \cup (1, \infty)$ a hraničními body jsou 0 a 1. Platí tedy

$$M^\circ = (0,1), \quad \partial M = \{0,1\}, \quad \overline{M} = [0,1].$$

Poznámka 1.3. Rozmyslete si následující jednoduchá tvrzení:

- Je-li x vnitřní bod M, pak $x \in M$. Je-li x vnější bod M, pak $x \notin M$. Hraniční bod může, ale nemusí být prvkem M.
- x je vnější bod $M \iff x$ je vnitřní bod $X \setminus M$.
- x je hraniční bod $M \iff$ pro každé $r > 0$ má $B_r(x)$ neprázdný průnik s M i s $X \setminus M \iff x$ je hraniční bod $X \setminus M$.

Následující věta představuje alternativní způsoby, jak popsat uzávěr a hranici libovolné množiny.

Věta 1.4. *Pro každou množinu $M \subset X$ platí následující tvrzení:*

1. $\overline{M} = M^\circ \cup \partial M$.
2. $\partial M = \overline{M} \setminus M^\circ$.
3. $\partial M = \overline{M} \cap \overline{X \setminus M}$.

Důkaz. K důkazu prvního tvrzení potřebujeme ověřit $M^\circ \cup \partial M = M \cup \partial M$. Inkluze $M^\circ \cup \partial M \subset M \cup \partial M$ je zřejmá, neboť $M^\circ \subset M$. K důkazu opačné inkluze stačí ověřit $M \subset M^\circ \cup \partial M$, což platí, protože každý bod množiny M je buď jejím vnitřním, nebo hraničním bodem.

Druhé tvrzení plyne z prvního a ze skutečnosti, že M° a ∂M jsou disjunktní.

Dokažme třetí tvrzení: Podle prvního tvrzení platí $x \in \overline{M}$, právě když x je vnitřní nebo hraniční bod M. Podobně platí, že $x \in \overline{X \setminus M}$, právě když x je vnitřní nebo hraniční bod $X \setminus M$. Obě možnosti, tj. $x \in \overline{M}$ a zároveň $x \in \overline{X \setminus M}$, nastanou právě tehdy, když x je hraniční bod M (což je podle poznámky 1.3 totéž, jako hraniční bod $X \setminus M$). □

Další věta charakterizuje vztah vnitřku, uzávěru a hranice k otevřeným a uzavřeným množinám.

Věta 1.5. *Pro každou množinu $M \subset X$ platí následující tvrzení:*

1. *M je otevřená $\iff$ $M^\circ = M$.*
2. *M° je vždy otevřená množina.*
3. *M je uzavřená $\iff$ $\overline{M} = M$.*
4. *$\overline{M}$ je vždy uzavřená množina.*
5. *∂M je vždy uzavřená množina.*

Důkaz. První tvrzení je zřejmé – definice otevřené množiny říká, že všechny její body jsou vnitřní.

Druhé tvrzení: Pokud $x \in M^\circ$, pak podle definice vnitřního bodu existuje $r > 0$ takové, že $B_r(x) \subset M$. Tvrdíme, že dokonce $B_r(x) \subset M^\circ$. To plyne z otevřenosti $B_r(x)$: Každý bod z $B_r(x)$ má jisté okolí obsažené v $B_r(x)$, a tedy i v M, tudíž je to vnitřní bod M.

Třetí tvrzení je důsledkem následujících ekvivalencí: $\overline{M} = M \iff \partial M \subset M \iff \partial(X \setminus M) \subset M \iff$ $X \setminus M$ nemá hraniční body ležící v $X \setminus M$ $\iff$ všechny body množiny $X \setminus M$ jsou její vnitřní body $\iff$ $X \setminus M$ je otevřená $\iff$ M je uzavřená.

Čtvrté tvrzení: Stačí dokázat, že $X \setminus \overline{M}$ je otevřená. Jelikož $\overline{M} = M^\circ \cup \partial M$, množina $X \setminus \overline{M}$ obsahuje právě všechny vnější body množiny M. Stačí tedy ověřit, že množina všech vnějších bodů M je otevřená. Tato množina se však shoduje s vnitřkem $X \setminus M$, který je podle druhého tvrzení otevřený.

Páté tvrzení plyne ze vztahu $\partial M = \overline{M} \cap \overline{X \setminus M}$ a ze skutečnosti, že průnik uzavřených množin je uzavřená množina. □

Důsledek 1.6. *Pro každou množinu $M \subset X$ platí $(M^\circ)^\circ = M^\circ$, $\overline{\overline{M}} = \overline{M}$.*

2 Izolované a hromadné body

Definice 2.1. Nechť je dána množina $M \subset X$.

- Bod $x \in X$ je *izolovaným bodem* množiny M, pokud existuje $r > 0$ takové, že $B_r(x) \cap M = \{x\}$.
- Bod $x \in X$ je *hromadným bodem* množiny M, pokud pro každé $r > 0$ platí $(B_r(x) \setminus \{x\}) \cap M \neq \emptyset$.

Vyjářeno slovy: Libovolně malé okolí hromadného bodu x (který může, ale nemusí patřit do M) musí obsahovat nějaký bod z M různý od x. Naopak pro izolovaný bod x, který musí ležet v M, lze najít okolí neobsahující žádný jiný bod z M.

Příklad 2.2. Nechť $X = \mathbb{R}$ se standardní eukleidovskou metrikou a $M = \{1\} \cup (2, 3]$. Jediným izolovaným bodem M je 1. Hromadnými body M jsou všechny body z intervalu $[2, 3]$.

Poznámka 2.3. Rozmyslete si následující pozorování:

- $x \in X$ je hromadným bodem množiny M, právě když pro každé $r > 0$ obsahuje $B_r(x)$ nekonečně mnoho bodů z M.
- Je-li $x \in X$ vnějším bodem M, pak není izolovaným ani hromadným bodem M.

Následující věta představuje další ekvivalentní způsob, jak popsat uzávěr množiny.

Věta 2.4. *Pro každou množinu $M \subset X$ platí, že $\overline{M}$ vznikne z M přidáním všech hromadných bodů M.*

Důkaz. Připomeňme, že $\overline{M} = M \cup \partial M = M^\circ \cup \partial M$.

Pokud $x \in \partial M$, pak pro každé $r > 0$ je $B_r(x) \cap M \neq \emptyset$ (v opačném případě by byl x vnějším bodem M). To však může nastat jen v případě, kdy $x \in M$ nebo x je hromadný bod M.

Obráceně, pokud x je hromadný bod M, pak není vnější, tudíž platí $x \in M^\circ \cup \partial M = \overline{M}$. □

3 Cvičení

Cvičení 3.1. V metrickém prostoru $X = \mathbb{R}$ uvažujme množinu $M = \mathbb{Q}$. Najděte všechny její vnitřní, vnější, hraniční, izolované a hromadné body. Jak vypadá vnitřek, hranice a uzávěr M?

Cvičení 3.2. V metrickém prostoru $X = \mathbb{R}$ najděte příklad množiny, která není omezená, má nekonečně mnoho izolovaných bodů, aspoň jeden hromadný bod a žádný vnitřní bod.

Cvičení 3.3. V prostoru $\mathbb{R}^2$ s eukleidovskou metrikou uvažujme množinu

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = \sin(1/x)\}.$$

Najděte všechny vnitřní, hraniční, vnější, izolované a hromadné body množiny M. Jak vypadá vnitřek, hranice a uzávěr M?

Cvičení 3.4. Rozhodněte, zda v každém metrickém prostoru X platí pro všechna $x \in X$ a $r > 0$ vztah

$$\overline{B_r(x)} = K_r(x).$$

Cvičení 3.5. V prostoru všech omezených reálných posloupností ℓ^∞ se suprémovou normou uvažujme množinu

$$M = \{\{x_n\}_{n=1}^\infty \in \ell^\infty : x_1 > x_2\}.$$

Najděte všechny její vnitřní, vnější a hraniční body. Je M otevřená, resp. uzavřená? Jak vypadá vnitřek, hranice a uzávěr M?

Cvičení 3.6. V prostoru spojitých reálných funkcí $C([0, 1])$ se suprémovou normou uvažujme množinu

$$M = \{f : [0, 1] \to \mathbb{R} : \ f \text{ je spojitá a } f(0) = f(1)\}.$$

Najděte všechny její vnitřní, vnější a hraniční body. Je M otevřená, resp. uzavřená? Jak vypadá vnitřek, hranice a uzávěr M?

Řešení:

1. Nemá vnitřní, vnější ani izolované body. Všechny body z $\mathbb{R}$ jsou hraničními a hromadnými body M. Platí $M^\circ = \emptyset$, $\partial M = \overline{M} = \mathbb{R}$.

2. Například $\{2^n : n \in \mathbb{Z}\}$.

3. Nemá žádné izolované ani vnitřní body (tj. $M^\circ = \emptyset$). Dále platí $\partial M = \overline{M} = M \cup \{(0, y) : y \in [-1, 1]\}$, hromadné body jsou totožné s hraničními, vnější body jsou všechny body z $\mathbb{R}^2 \setminus \partial M$.

4. Obecně neplatí, např. v diskrétním metrickém prostoru X pro libovolný bod x máme $B_1(x) = \{x\}$ a tudíž $\overline{B_1(x)} = \{x\}$, zatímco $K_1(x) = X$.

5. Všechny body z M jsou vnitřní. Vnější body jsou posloupnosti $\{x_n\}_{n=1}^\infty \in \ell^\infty$ splňující $x_1 < x_2$. Dále platí $M^\circ = M$, $\overline{M} = \{\{x_n\}_{n=1}^\infty \in \ell^\infty : x_1 \geq x_2\}$, $\partial M = \{\{x_n\}_{n=1}^\infty \in \ell^\infty : x_1 = x_2\}$. M je otevřená, není uzavřená.

6. Všechny body z M jsou hraniční, nemá vnitřní body. Vnější body jsou všechny funkce $f \in C([0, 1])$ splňující $f(0) \neq f(1)$. Platí $M^\circ = \emptyset$, $\overline{M} = \partial M = M$. M je uzavřená, není otevřená.