Limity a spojitost v metrických prostorech

Antonín Slavík
Matematicko-fyzikální fakulta UK

Nadále předpokládáme, že X je metrický prostor s metrikou d. V metrických prostorech lze studovat konvergenci posloupností a spojitost funkcí – definice jsou téměř totožné jako pro reálné posloupnosti a funkce, stačí absolutní hodnotu nahradit obecnou metrikou. Uvidíme, že s konvergencí úzce souvisejí dříve zavedené pojmy hromadného bodu a uzávěru množiny.

1 Limity posloupností

Definice 1.1. Posloupnost bodů $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ z X je *konvergentní* a má *limitu* $x \in X$ (píšeme $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ nebo $x_n \to x$), pokud $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_0 \ d(x_n, x) < \varepsilon$.

Definice 1.2. Posloupnost bodů $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ z X se nazývá *cauchyovská*, pokud platí $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ $\forall m, n \geq n_0 \ d(x_n, x_m) < \varepsilon$.

Poznámka 1.3. Rozmyslete si následující jednoduchá tvrzení:

- $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, právě když $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$. (V prvním případě jde o limitu posloupnosti v metrickém prostoru X, ve druhém případě o limitu posloupnosti reálných čísel.)
- Je-li X normovaný lineární prostor, pak platí ekvivalence $x_n \to x \iff d(x_n, x) \to 0 \iff \|x_n - x\| \to 0 \iff d(x_n - x, 0) \to 0 \iff x_n - x \to 0$.
- Limita posloupnosti v metrickém prostoru je určena jednoznačně. (Pokud by existovaly dvě různé limity, stačí za ε zvolit polovinu jejich vzdálenosti a dojdeme ke sporu.)
- Každá konvergentní posloupnost je cauchyovská a omezená. (Důkaz je stejný jako pro posloupnosti reálných čísel.)

Podíváme se, jak vypadají konvergentní posloupnosti v některých konkrétních metrických prostorech. Z následující věty plyne (pokud volíme $X_1 = \cdots = X_n = \mathbb{R}$ a $d_i(x, y) = |x - y|$), že v prostoru $\mathbb{R}^n$ s normou $\|\cdot\|_p$ nebo $\|\cdot\|_\infty$ (tj. vlastně v ℓ_n^p nebo v ℓ_n^∞) posloupnost bodů konverguje, právě když konverguje po složkách.

Věta 1.4. *Nechť $X_1, \ldots, X_n$ jsou metrické prostory s metrikami $d_1, \ldots, d_n$ a $X = X_1 \times \cdots \times X_n$ je metrický prostor s metrikou*

$$\rho_p(x, y) = \left(\sum_{i=1}^n d_i(x_i, y_i)^p \right)^{1/p}$$

pro jisté $p \in [1, \infty)$, případně s metrikou

$$\rho_\infty(x, y) = \max\{d_i(x_i, y_i) : i = 1, \ldots, n\}.$$

Pak posloupnost $\{x^k\}_{k=1}^\infty$, kde $x^k = (x_1^k, \ldots, x_n^k) \in X$, má limitu $x = (x_1, \ldots, x_n) \in X$, právě když pro každé $i \in \{1, \ldots, n\}$ platí $\lim_{k\to\infty} x_i^k = x_i$.

Důkaz. Pro všechna $i \in \{1, \ldots, n\}$, $p \in [1, \infty)$ a $y, z \in X$ platí nerovnosti

$$0 \le d_i(y_i, z_i) \le \rho_\infty(y, z) \le \rho_p(y, z) \le n^{1/p} \rho_\infty(y, z). \tag{1.1}$$

Pokud tedy platí $\lim_{k\to\infty} \rho_\infty(x^k, x) = 0$ nebo $\lim_{k\to\infty} \rho_p(x^k, x) = 0$, pak nutně $\lim_{k\to\infty} d_i(x_i^k, x_i) = 0$ pro všechna $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Obráceně, pokud platí $\lim_{k\to\infty} d_i(x_i^k, x_i) = 0$ pro všechna $i \in \{1, \ldots, n\}$, pak z definice ρ_∞ vyplývá $\lim_{k\to\infty} \rho_\infty(x^k, x) = 0$ a z poslední nerovnosti v (1.1) též $\lim_{k\to\infty} \rho_p(x^k, x) = 0$ pro všechna $p \in [1, \infty)$. □

Jaká je situace v prostorech posloupností ℓ^p a ℓ^∞? Následující věta říká, že pokud posloupnost posloupností konverguje, pak musí konvergovat po složkách.

Věta 1.5. *Nechť $p \in [1, \infty]$. Pokud pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $x^n \in \ell^p$ a $\lim_{n\to\infty} x^n = x$, pak pro každé $i \in \mathbb{N}$ platí $\lim_{n\to\infty} x_i^n = x_i$.*

Důkaz. Připomeňme, že $\lim_{n\to\infty} x^n = x$ znamená $\lim_{n\to\infty} \|x^n - x\|_p = 0$.

Pro $p = \infty$ plyne dokazované tvrzení z nerovnosti

$$|x_i^n - x_i| \le \sup_{i\in\mathbb{N}} |x_i^n - x_i| = \|x^n - x\|_\infty$$

a pro $p \in [1, \infty)$ z nerovnosti

$$|x_i^n - x_i| \le \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i^n - x_i|^p \right)^{1/p} = \|x^n - x\|_p. \qquad \square$$

Následující příklad ukazuje, že konvergence po složkách je pouze nutná, ale nikoliv postačující podmínka pro konvergenci v ℓ^p.

Příklad 1.6. Uvažujme následující posloupnost posloupností:

$$\begin{aligned}
x^1 &= (1, 0, 0, 0, 0, \cdots), \\
x^2 &= (1, \tfrac{1}{2}, 0, 0, 0, \cdots), \\
x^3 &= (1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, 0, 0, \cdots), \\
x^4 &= (1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{4}, 0, \cdots), \quad \text{atd.}
\end{aligned}$$

Je tato posloupnost konvergentní v prostoru ℓ^∞? Je konvergentní v prostoru ℓ^1?

Z věty (1.5) plyne, že pokud má $\{x^n\}_{n=1}^\infty$ limitu v ℓ^p, $p \in [1, \infty]$, pak se musí jednat o posloupnost získanou „limitováním“ po složkách, tj.

$$x = (1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{5}, \cdots).$$

Tato posloupnost však není prvkem ℓ^1, v tomto prostoru tedy $\{x^n\}_{n=1}^\infty$ nemá limitu. Posloupnost x je omezená, tudíž leží v ℓ^∞. Zbývá ověřit, zda skutečně platí $\lim_{n\to\infty} x^n = x$, tj. zda $\lim_{n\to\infty} \|x^n - x\|_\infty = 0$. To je pravda, neboť

$$\|x^n - x\|_\infty = \|(0, \ldots, 0, \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+2}, \ldots)\|_\infty = \frac{1}{n+1} \to 0.$$

Ukázali jsme, že v prostoru ℓ^∞ má $\{x^n\}_{n=1}^\infty$ limitu x.

Všimneme si ještě konvergence posloupností v prostoru spojitých funkcí se suprémovou normou, kde je situace jednoduchá.

Věta 1.7. *Posloupnost funkcí $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ z $C([a,b])$ má limitu $f \in C([a,b])$, právě když $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ stejnoměrně konverguje k f.*

Důkaz. Víme, že $f_n \to f$ v $C([a,b])$, právě když $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$. Podle definice limity to nastává, právě když

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_0 \ \|f_n - f\|_\infty < \varepsilon.$$

Podle definice suprémové normy to je ekvivalentní s tvrzením

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_0 \ \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

což nastává, právě když

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_0 \ \forall x \in [a,b] \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

neboli když $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ stejnoměrně konverguje k f. □

Od příkladů konvergence v konkrétních prostorech se nyní vrátíme zpět k obecnému metrickému prostoru.

Následující věta ukazuje souvislost mezi uzávěrem množiny $M \subset X$ a konvergentními posloupnostmi: Uzávěr M je tvořen všemi body, ke kterým lze dokonvergovat pomocí posloupností z M.

Věta 1.8. *Nechť $M \subset X$. Pak $x \in \overline{M}$, právě když existuje posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ tvořená body z M, která má limitu x.*

Důkaz. Pokud $x \in \overline{M}$, pak $x \in M$ nebo $x \in \partial M$. V prvním případě můžeme vzít konstantní posloupnost $x_n = x$, která má jistě limitu x. Ve druhém případě z vlastností hraničního bodu plyne, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ koule $B_{1/n}(x)$ obsahuje aspoň jeden bod z M, nazvěme jej x_n. Je zřejmé, že $x_n \to x$.

Pokud existuje posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ tvořená body z M, která má limitu x, pak pro každé $\varepsilon > 0$ koule $B_\varepsilon(x)$ obsahuje aspoň jeden bod této posloupnosti, čili bod z M. Tudíž x nemůže být vnějším bodem M a je vnitřní nebo hraniční, čili $x \in \overline{M}$. □

Víme, že množina M je uzavřená, právě když $\overline{M} = M$. Z předchozí věty tudíž plyne, že množina je uzavřená, pokud z ní nelze „vykonvergovat“.

Důsledek 1.9. *Množina $M \subset X$ je uzavřená, právě když pro každou konvergentní posloupnost bodů z M platí, že její limita leží v M.*

Příklad 1.10. Vraťme se ke cvičení 3.6 z minulého týdne, kde byl zadán prostor $C([0,1])$ a množina

$$M = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} : \ f \text{ je spojitá a } f(0) = f(1)\}.$$

Jedním z úkolů bylo rozhodnout, zda M je uzavřená. To lze podle definice udělat tak, že ověříme, že doplněk M je otevřený. Jiným řešením je použít důsledek 1.9. Nechť $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ je posloupnost funkcí z M, která má limitu f. Chceme ověřit, že $f \in M$. Víme, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $f_n(0) = f_n(1)$. Podle věty 1.7 konverguje $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ stejnoměrně k f, tudíž $f(0) = f(1)$, což znamená, že $f \in M$.

Příklad 1.11. Vraťme se ke cvičení 3.5 z minulého týdne, kde byl zadán prostor $X = \ell^\infty$ a množina

$$M = \{\{x_n\}_{n=1}^\infty \in \ell^\infty : \ x_1 > x_2\}.$$

Jedním z úkolů bylo najít uzávěr množiny M. Ukažme, jak to lze provést pomocí věty 1.8. Chceme zjistit, k jakým posloupnostem lze dokonvergovat pomocí posloupností z M. Nechť $\{x^k\}_{k=1}^\infty$ je posloupnost posloupností z M, která má limitu $x \in \ell^\infty$. Víme, že pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí $x_1^k > x_2^k$. Podle věty 1.5 pak platí $x_1 = \lim_{k\to\infty} x_1^k \geq \lim_{k\to\infty} x_2^k = x_2$. Tím jsme ukázali, že

$$\overline{M} \subset \{\{x_n\}_{n=1}^\infty \in \ell^\infty : \ x_1 \geq x_2\}.$$

K tomu, abychom mohli inkluzi nahradit rovností, musíme dokázat, že každá posloupnost $x \in \ell^\infty$ splňující $x_1 \geq x_2$ je limitou nějaké posloupnosti posloupností z M. To je však jednoduché, stačí vzít

$$x^k = (x_1, x_2 - \frac{1}{k}, x_3, x_4, \ldots), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Pak $x^k \to x$ (protože $\|x^k - x\|_\infty = \frac{1}{k} \to 0$) a pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí $x^k \in M$ (protože $x_1 \geq x_2 > x_2 - \frac{1}{k}$).

Pomocí konvergentních posloupností lze charakterizovat i hromadné body množiny.

Věta 1.12. *Nechť $M \subset X$. Pak $x \in X$ je hromadný bod M, právě když existuje prostá posloupnost*[1] *$\{x_n\}_{n=1}^\infty$ tvořená body z $M \setminus \{x\}$, která má limitu x.*

Důkaz. Pokud existuje posloupnost se zmíněnými vlastnostmi, pak pro každé $\varepsilon > 0$ obsahuje $B_\varepsilon(x) \setminus \{x\}$ aspoň jeden člen této posloupnosti, tudíž aspoň jeden bod z M. Tím je ověřeno, že x je hromadný bod M.

Nechť $x \in X$ je hromadný bod M. Z definice hromadného bodu plyne, že můžeme volit $x_1 \in M \setminus \{x\}$ tak, že $d(x_1, x) < 1$. Dále zvolíme $x_2 \in M \setminus \{x\}$ tak, že $d(x_2, x) < \frac{1}{2}$ a zároveň $d(x_2, x) < d(x_1, x)$. Postupujeme podobně dále a v n-tém kroku volíme $x_n \in M \setminus \{x\}$ tak, aby $d(x_n, x) < \frac{1}{n}$ a zároveň $d(x_n, x) < d(x_{n-1}, x)$. Takto zkonstruujeme posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ tvořenou body z $M \setminus \{x\}$. Z požadavku $d(x_n, x) < \frac{1}{n}$ plyne $x_n \to x$ a požadavek $d(x_n, x) < d(x_{n-1}, x)$ zaručuje, že posloupnost je prostá (každý člen posloupnosti je k x blíže, než všichni jeho předchůdci). □

2 Spojitá zobrazení

Definice 2.1. Nechť X, Y jsou metrické prostory. Zobrazení $f : X \to Y$ je *spojité* v bodě $x_0 \in X$, pokud platí $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ d(x, x_0) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$.

Ekvivalentně lze psát $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ f(B_\delta(x_0)) \subset B_\varepsilon(f(x_0))$.[2]

Následující věta představuje Heineho podmínku pro spojitost v obecném metrickém prostoru.

Věta 2.2. *Zobrazení $f : X \to Y$ je spojité v bodě $x_0 \in X$, právě když pro každou posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ splňující $x_n \to x_0$ platí $f(x_n) \to f(x_0)$.*

Důkaz. Nechť $f : X \to Y$ je spojité v bodě $x_0 \in X$ a $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ je posloupnost splňující $x_n \to x_0$. Volme $\varepsilon > 0$. Z definice spojitosti existuje $\delta > 0$ takové, že pokud $d(x, x_0) < \delta$, pak $d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$. Z definice limity existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $n \geq n_0$ platí $d(x_n, x_0) < \delta$, a tudíž také $d(f(x_n), f(x_0)) < \varepsilon$.

Místo druhé implikace dokážeme její obměnu. Nechť f není spojité v x_0. Pak existuje $\varepsilon > 0$ takové, že pro každé $\delta > 0$ najdeme $x \in X$ splňující $d(x, x_0) < \delta$ a $d(f(x), f(x_0)) \geq \varepsilon$. Tedy pro každé $n \in \mathbb{N}$ můžeme volit $\delta = \frac{1}{n}$ a najít $x_n \in X$ splňující $d(x_n, x_0) < \frac{1}{n}$ a $d(f(x_n), f(x_0)) \geq \varepsilon$. Tím jsme zkonstruovali posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^\infty$, která splňuje $x_n \to x_0$, ale nesplňuje $f(x_n) \to f(x_0)$. □

Budeme říkat, že zobrazení $f : X \to Y$ je spojité, pokud je spojité ve všech bodech. Spojitá zobrazení lze charakterizovat pomocí vzorů otevřených, resp. uzavřených množin.

Věta 2.3. *Následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

1. *$f : X \to Y$ je spojité zobrazení.*
2. *Pro každou otevřenou množinu $M \subset Y$ je množina $f^{-1}(M)$ otevřená.*
3. *Pro každou uzavřenou množinu $M \subset Y$ je množina $f^{-1}(M)$ uzavřená.*

[1] Tj. $x_n \neq x_m$ kdykoliv $n \neq m$.

[2] Rozmyslete si, že jde pouze o jiný zápis definice. Na levé straně inkluze je koule v X, zatímco na pravé straně koule v Y.

Důkaz. 1 ⇒ 2: Nechť $M \subset Y$ je otevřená. Předpokládejme, že $f^{-1}(M)$ je neprázdná (jinak je jistě otevřená) a volme $x_0 \in f^{-1}(M)$. Pak $f(x_0) \in M$ a z definice otevřenosti existuje $\varepsilon > 0$ takové, že $B_\varepsilon(f(x_0)) \subset M$. Jelikož f je spojité v bodě x_0, existuje $\delta > 0$ takové, že $f(B_\delta(x_0)) \subset B_\varepsilon(f(x_0)) \subset M$. Odtud plyne $B_\delta(x_0) \subset f^{-1}(M)$.

2 ⇒ 1: Volme $x_0 \in X$ a ukažme, že f je spojité v x_0. Nechť $\varepsilon > 0$. Jelikož $M = B_\varepsilon(f(x_0))$ je otevřená, její vzor $f^{-1}(M)$ je podle předpokladu též otevřená množina, která navíc obsahuje x_0. Z definice otevřenosti plyne existence $\delta > 0$ takového, že $B_\delta(x_0) \subset f^{-1}(M)$, tudíž $f(B_\delta(x_0)) \subset M = B_\varepsilon(f(x_0))$.

2 $\iff$ 3: Víme, že $M \subset Y$ je uzavřená, právě když $Y \setminus M$ je otevřená. Podobně $f^{-1}(M) \subset X$ je uzavřená, právě když $X \setminus f^{-1}(M)$ je otevřená. Avšak $X \setminus f^{-1}(M) = f^{-1}(Y \setminus M)$, neboť na obou stranách rovnosti jsou množiny obsahující právě všechny body z X, které f nezobrazí do M. Ukázali jsme tedy, že $f^{-1}(M) \subset X$ je uzavřená, právě když $f^{-1}(Y \setminus M)$ je otevřená. Odtud plyne ekvivalence tvrzení 2 a 3, neboť jedno získáme z druhého tak, že od množin Y přejdeme k jejich doplňkům. □

3 Lipschitzovská zobrazení a kontrakce

Podíváme se ještě na tři důležité speciální případy spojitých zobrazení.

Definice 3.1. Zobrazení $f : X \to Y$ se nazývá *izometrie*, pokud pro všechna $x, y \in X$ platí rovnost $d(f(x), f(y)) = d(x, y)$.

Zobrazení $f : X \to Y$ se nazývá *lipschitzovské*, pokud existuje konstanta $K \geq 0$ taková, že pro všechna $x, y \in X$ platí $d(f(x), f(y)) \leq K d(x, y)$. Pokud lze volit $K < 1$, pak f se nazývá *kontrakce*.

Z definice je zřejmé, že každá izometrie a každá kontrakce je lipschitzovské zobrazení. Dále platí, že každé lipschitzovské zobrazení je spojité (v definici spojitosti stačí volit $\delta = \varepsilon/K$).

Příklad 3.2. Každé shodné zobrazení v rovině (např. posunutí nebo otočení) je izometrie. Každá podobnost (např. stejnolehlost) je lipschitzovské zobrazení (přičemž za K volíme koeficient podobnosti). Pokud je koeficient podobnosti menší než 1, pak jde o kontrakci.

Následující tvrzení ukazuje, že vzdálenost bodu od množiny je lipschitzovské (a tedy spojité) zobrazení.

Věta 3.3. *Je-li $M \subset X$ neprázdná, pak zobrazení $f : X \to \mathbb{R}$ definované předpisem $f(x) = d(x, M)$ je lipschitzovské, přičemž lze volit $K = 1$.*

Důkaz. Podle definice platí $d(x, M) = \inf_{y \in M} d(x, y)$.

Pro všechna $x_1, x_2 \in X$ a $y \in M$ platí

$$d(x_1, M) \leq d(x_1, y) \leq d(x_1, x_2) + d(x_2, y),$$

tudíž přechodem k infimu přes všechna $y \in M$ dostáváme

$$d(x_1, M) \leq d(x_1, x_2) + d(x_2, M)$$

a po úpravě

$$d(x_1, M) - d(x_2, M) \leq d(x_1, x_2).$$

Protože body x_1, x_2 byly libovolné, můžeme je zaměnit a obdržíme

$$d(x_2, M) - d(x_1, M) \leq d(x_2, x_1) = d(x_1, x_2).$$

Z přechozích dvou nerovností plyne

$$|d(x_1, M) - d(x_2, M)| \leq d(x_1, x_2),$$

neboli $d(f(x_1), f(x_2)) \leq d(x_1, x_2)$. □

Příklad 3.4. V minulosti jsme dokázali, že otevřená koule $B_r(y)$ je otevřená množina a uzavřená koule $K_r(y)$ je uzavřená množina. Ukažme si jiný důkaz: Volíme-li $M = \{y\}$, pak věta 3.3 říká, že zobrazení $f(x) = d(x, y)$ je spojité. Dále platí

$$\begin{aligned} B_r(y) &= \{z \in X;\ d(z, y) < r\} = \{z \in X;\ f(z) < r\} = f^{-1}((-\infty, r)), \\ K_r(y) &= \{z \in X;\ d(z, y) \le r\} = \{z \in X;\ f(z) \le r\} = f^{-1}((-\infty, r]). \end{aligned}$$

Jelikož $(-\infty, r)$ je otevřená množina, $f^{-1}((-\infty, r))$ je podle věty 2.3 rovněž otevřená. Podobně $(-\infty, r]$ je uzavřená a tedy $f^{-1}((-\infty, r])$ je rovněž uzavřená.

4 Cvičení

Cvičení 4.1. Uvažujme následující posloupnost posloupností:

$$\begin{aligned} x^1 &= (1, 0, 0, 0, 0, \cdots), \\ x^2 &= (0, 1, 0, 0, 0, \cdots), \\ x^3 &= (0, 0, 1, 0, 0, \cdots), \\ x^4 &= (0, 0, 0, 1, 0, \cdots), \quad \text{atd.} \end{aligned}$$

Je tato posloupnost konvergentní v prostoru ℓ^p pro nějaké $p \in [1, \infty]$?

Cvičení 4.2. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ uvažujme funkci $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ takovou, že $f_n(0) = 0$, $f_n(1/2^n) = 1$, $f_n(1/2^{n-1}) = 0$, na intervalech $[0, 1/2^n]$ a $[1/2^n, 1/2^{n-1}]$ je f_n lineární a na $[1/2^{n-1}, 1]$ je nulová. (Načrtněte si graf.)

Má posloupnost funkcí $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ limitu v prostoru $C([0, 1])$? Má limitu v prostoru $L^1([0, 1])$?

Cvičení 4.3. V prostoru $X = C([0, 1])$ uvažujme množinu

$$M = \{f \in X : f(1/2) > 1/2\}.$$

Jak vypadá její uzávěr? Použijte větu 1.8.

Cvičení 4.4. V prostoru $X = \mathbb{R}^2$ s eukleidovskou metrikou uvažujme množiny

$$M_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x^2 + y^2)^3 < (x^2 - y^2)^2\},$$

$$M_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x^2 + y^2)^3 = (x^2 - y^2)^2\}.$$

Ukažte, že M_1 je otevřená a M_2 je uzavřená. Využijte větu 2.3 – pokuste se vyjádřit M_1 a M_2 jako vzor otevřené/uzavřené množiny pro vhodné spojité zobrazení $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Dále ukažte, že množina

$$M_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{y}{\sin(x^2 y^3)} > 2\}$$

je otevřená. Využijte skutečnost, že sjednocení/průnik dvou otevřených množin je otevřená množina.

Cvičení 4.5. Rozhodněte, zda množina všech reálných posloupností, které jsou s výjimkou konečně mnoha členů nulové, je uzavřená podmnožina prostoru ℓ^∞. Použijte důsledek 1.9.

Řešení:

1. Není konvergentní pro žádné $p \in [1, \infty]$.

2. V $C([0, 1])$ není konvergentní, v $L^1([0, 1])$ konverguje k nulové funkci.

3. $\overline{M} = \{f \in X : f(1/2) \ge 1/2\}$.

4. Definujeme-li $f(x,y) = (x^2+y^2)^3 - (x^2-y^2)^2$, pak $M_1 = f^{-1}((-\infty,0))$ a $M_2 = f^{-1}(\{0\})$. Definujeme-li $g(x,y) = \sin(x^2y^3)$ a $h(x,y) = y - 2\sin(x^2y^3)$, pak

$$M_3 = \big(g^{-1}((0,\infty)) \cap h^{-1}((0,\infty))\big) \cup \big(g^{-1}((-\infty,0)) \cap h^{-1}((-\infty,0))\big).$$

5. Není uzavřená, což plyne např. z příkladu 1.6.