

Matematická analýza VI – požadavky ke zkoušce (LS 2022/23)

1. Fourierovy řady

Trigonometrické polynomy v reálném a komplexním tvaru a jejich vzájemný vztah (odvození). Aproximace spojitých funkcí trigonometrickými polynomy (bez důkazu). Trigonometrické řady – komplexní a reálný tvar. Výpočet koeficientů pro stejnoměrně konvergentní trigonometrickou řadu. Fourierovy koeficienty a řady pro funkce v L^1 . Riemannovo-Lebesgueovo lemma. Vlastnosti Dirichletova jádra. Bodová konvergence Fourierovy řady (Dirichletova věta). Ortogonální a ortonormální množina, úplná ortonormální množina, úplný prostor se skalárním součinem. Věta o nejlepší aproximaci, Besselova nerovnost. Fourierovy koeficienty a Fourierova řada prvku vzhledem k ortonormální množině. Parsevalova rovnost a rozvoj do Fourierovy řady pro úplné ortonormální množiny. Aproximace funkcí v L^p spojitými funkcemi (bez důkazu). Úplnost a Parsevalova rovnost pro komplexní trigonometrický systém. Definice cesàrovské sčitatelnosti řad, Fejérova věta (bez důkazu).

2. Metrické prostory

Metrické prostory, normované lineární prostory, prostory se skalárním součinem a jejich vzájemný vztah. Otevřená a uzavřená koule, otevřené a uzavřené množiny, jejich sjednocení a průniky. Otevřená/uzavřená koule je otevřená/uzavřená množina. Průměr množiny, omezené množiny, vzdálenosti bodů a množin. Vnitřní, vnější a hraniční body. Vnitřek, hranice a uzávěr množiny, jejich vlastnosti – popis uzávěru a hranice, vztah vnitřku, uzávěru a hranice k otevřenosti a uzavřenosti. Izolované a hromadné body, popis uzávěru pomocí hromadných bodů. Limita posloupnosti, cauchyovská posloupnost. Vztahy mezi konvergencí, uzávěrem a hromadnými body. Spojitá zobrazení, Heineho podmínka pro spojitost, charakterizace spojitých zobrazení. Lipschitzovská zobrazení, izometrie a kontrakce, vzdálenost bodu od množiny je lipschitzovské zobrazení. Úplné prostory a jejich uzavřené podmnožiny. Množina má stejný průměr jako její uzávěr. Cantorova věta, Banachova věta o pevném bodu. Kritérium pro lipschitzovská zobrazení a kontrakce. Aplikace Banachovy věty – výpočet odmocnin, Picardova věta o existenci a jednoznačnosti řešení ODR. Husté a řídké množiny a jejich vzájemný vztah. Ekvivalentní definice řídkých množin, sjednocení řídkých množin.

Není-li uvedeno jinak, jsou všechna tvrzení vyžadována s důkazem. Důkazům je nutné rozumět, tj. umět vysvětlit jednotlivé kroky (nikoliv je pouze znát z paměti). Všechny definice je potřeba umět ilustrovat na příkladech.