Metrické prostory – základní pojmy

Antonín Slavík
Matematicko-fyzikální fakulta UK

V této přednášce zavedeme některé základní geometrické pojmy v metrických prostorech a ilustrujeme je na jednoduchých příkladech. V celém textu předpokládáme, že X je metrický prostor s metrikou d.

1 Otevřené a uzavřené koule

Definice 1.1. *Otevřená koule se středem $x \in X$ a poloměrem $r > 0$* je množina

$$B_r(x) = \{y \in X : d(y,x) < r\}.$$

Uzavřená koule se středem $x \in X$ a poloměrem $r \geq 0$ je množina

$$K_r(x) = \{y \in X : d(y,x) \leq r\}.$$

Pokud je X normovaný lineární prostor, pak metrika je určena normou a platí

$$B_r(x) = \{y \in X : \|y - x\| < r\}, \quad K_r(x) = \{y \in X : \|y - x\| \leq r\}.$$

Zkusíme prozkoumat, jak vypadají koule v některých prostorech zavedených v předchozí přednášce.

Příklad 1.2. Nechť $X = \mathbb{R}$ se standardní eukleidovskou metrikou. Pak platí $B_r(x) = (x - r, x + r)$ a $K_r(x) = [x - r, x + r]$.

Příklad 1.3. Popíšeme, jak vypadají koule v prostoru ℓ_2^p, tj. v $\mathbb{R}^2$ s normou $\|y\|_p = (|y_1|^p + |y_2|^p)^{1/p}$ pro $p \in [1, \infty)$, případně $\|y\|_\infty = \max(|y_1|, |y_2|)$. Podle definice

$$K_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^2 : \|y - x\|_p \leq r\}, \quad B_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^2 : \|y - x\|_p < r\}.$$

Stačí se omezit na koule se středem v počátku, ostatní získáme posunutím.

Pro $p = 2$ je $K_r(0) = \{y \in \mathbb{R}^2 : (|y_1|^2 + |y_2|^2)^{1/2} \leq r\}$, což je eukleidovský kruh se středem v počátku a poloměrem r.

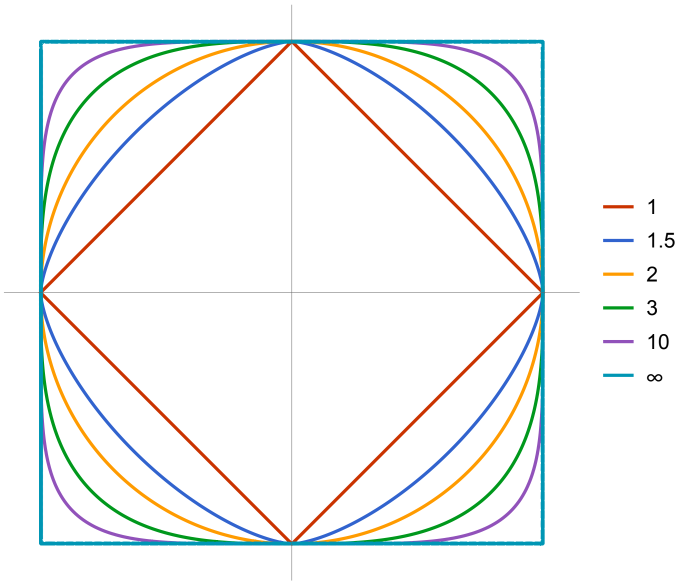
Pro $p = 1$ je $K_r(0) = \{y \in \mathbb{R}^2 : |y_1| + |y_2| \leq r\}$. V prvním kvadrantu lze vynechat absolutní hodnoty a nerovnost $y_1 + y_2 \leq r$ popisuje trojúhelník s vrcholy v bodech $[0, 0]$, $[r, 0]$, $[0, r]$; ve zbývajících kvadrantech je situace symetrická, tedy $K_r(0)$ je čtverec s vrcholy v bodech $[r, 0]$, $[0, r]$, $[-r, 0]$, $[0, -r]$.

Pro $p = \infty$ je $K_r(0) = \{y \in \mathbb{R}^2 : \max(|y_1|, |y_2|) \leq r\}$. Příslušná nerovnost je splněna, právě když $|y_1| \leq r$ a zároveň $|y_2| \leq r$. Vidíme, že $K_r(0) = [-r, r] \times [-r, r]$, což je čtverec s vrcholy v bodech $[r, r]$, $[-r, r]$, $[-r, -r]$, $[r, -r]$.

Obecnou situaci znázorňuje obrázek 1, kde jsou vyznačeny hranice uzavřených koulí $K_r(0)$ v závislosti na volbě p. Pro $p = 1$ je koule nejmenší, s rostoucím p se „nafukuje“ a limitně se blíží ke čtverci $[-r, r] \times [-r, r]$, který odpovídá volbě $p = \infty$.

Je zřejmé, jak se liší otevřené koule od uzavřených: Všechny neostré nerovnosti se změní na ostré a hranice už nebude součástí koule.

Podobné úvahy jako v tomto příkladu lze provést i ve vyšších dimenzích, tj. pro $n \geq 3$.



Obrázek 1: $X = \ell_2^p$: Tvary uzavřených koulí v závislosti na volbě $p \in [1, \infty]$

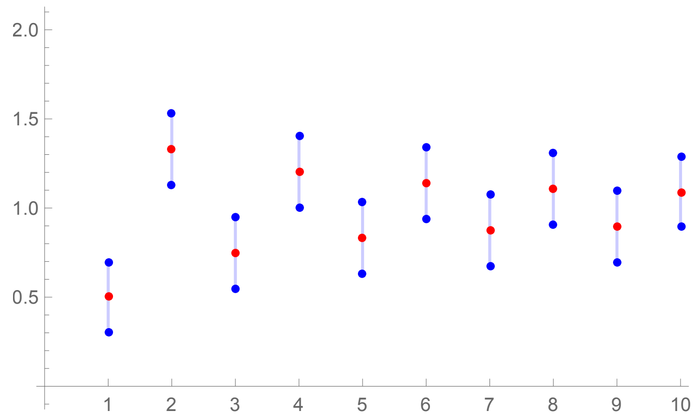
Příklad 1.4. Uvažujme prostor $X = \ell^\infty$ všech reálných omezených posloupností se suprémovou normou. Je-li dána posloupnost $x = \{x_i\}_{i=1}^\infty \in \ell^\infty$, jak vypadá uzavřená koule $K_r(x)$? Podle definice

$$K_r(x) = \{y \in \ell^\infty : \|y - x\|_\infty \leq r\}.$$

Pro $y = \{y_i\}_{i=1}^\infty$ z definice suprémové normy plyne

$$\|y - x\|_\infty = \sup_{i \in \mathbb{N}} |y_i - x_i|.$$

Tudíž nerovnost $\|y - x\|_\infty \leq r$ je splněna právě tehdy, když $|y_i - x_i| \leq r$ pro každé $i \in \mathbb{N}$. Vidíme, že uzavřená koule $K_r(x)$ je tvořena všemi posloupnostmi $y \in \ell^\infty$ takovými, že pro každé $i \in \mathbb{N}$ platí $y_i \in [x_i - r, x_i + r]$. Geometricky to znamená, že graf posloupnosti y leží v pásu o šířce $2r$ obklopujícím graf posloupnosti x, viz obrázek 2.



Obrázek 2: $X = \ell^\infty$: Uzavřená koule o poloměru r, jejímž středem je červeně znázorněná posloupnost, je tvořena všemi posloupnostmi obsaženými v pásu vyznačeném modrými úsečkami o délce $2r$

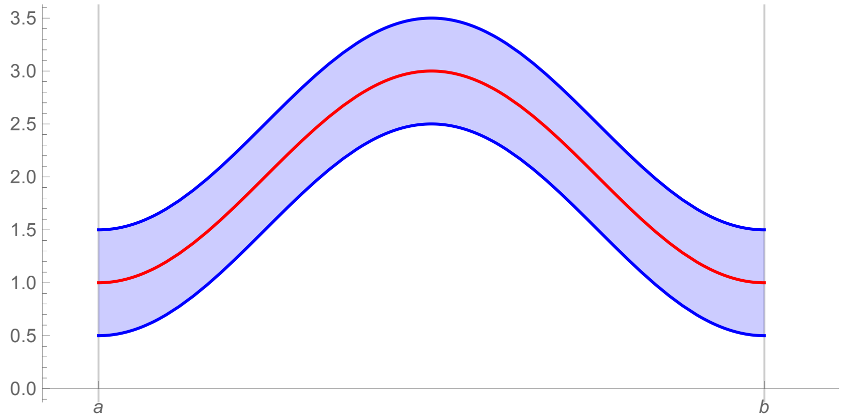
Příklad 1.5. Uvažujme prostor $X = C([a, b])$ všech reálných spojitých funkcí na intervalu $[a, b]$ se suprémovou normou. Je-li dána funkce $f \in C([a, b])$, jak vypadá uzavřená koule $K_r(f)$? Podle definice

$$K_r(f) = \{g \in C([a, b]) : \|g - f\|_\infty \leq r\}.$$

Z definice suprémové normy plyne

$$\|g - f\|_\infty = \sup_{x \in [a,b]} |g(x) - f(x)|.$$

Tudíž nerovnost $\|g - f\|_\infty \le r$ je splněna právě tehdy, když $|g(x) - f(x)| \le r$ pro každé $x \in [a, b]$. Vidíme, že uzavřená koule $K_r(f)$ je tvořena všemi funkcemi $g \in C([a, b])$ takovými, že pro každé $x \in [a, b]$ platí $g(x) \in [f(x) - r, f(x) + r]$. Geometricky to znamená, že graf funkce g leží v pásu o šířce $2r$ obklopujícím graf funkce f, viz obrázek 3.



Obrázek 3: $X = C([a, b])$: Uzavřená koule o poloměru r, jejímž středem je červeně znázorněná funkce, je tvořena všemi funkcemi obsaženými v modrém pásu o šířce $2r$

2 Otevřené a uzavřené množiny

Definice 2.1. Množina $M \subset X$ se nazývá *otevřená*, pokud pro každé $x \in M$ existuje $r > 0$ takové, že $B_r(x) \subset M$. Množina $M \subset X$ se nazývá *uzavřená*, pokud její doplněk $X \setminus M$ je otevřená množina.

Příklad 2.2. Nechť $X = \mathbb{R}$ se standardní eukleidovskou metrikou. Pokud $-\infty < a < b < \infty$, pak otevřený interval (a, b) je otevřená množina a uzavřený interval $[a, b]$ je uzavřená množina. Polootevřený interval $[a, b)$ není otevřená ani uzavřená množina.

Poznámka 2.3. Z definice vyplývá, že v libovolném metrickém prostoru X jsou prázdná množina i celý prostor X otevřené množiny, tudíž jsou i uzavřené.

Poznámka 2.4. Otevřenost a uzavřenost množiny je vždy vázána na volbu metrického prostoru. Např. interval $(0, 1)$ není uzavřená množina v $\mathbb{R}$, ale je to uzavřená množina v prostoru $X = (0, 1)$. Podobně interval $[0, 1]$ není otevřená množina v $\mathbb{R}$, ale je to otevřená množina v prostoru $X = [0, 1]$.

Příklad 2.5. V diskrétním metrickém prostoru na libovolné množině X je každá množina $M \subset X$ otevřená: Volíme-li libovolné $x \in M$, pak pro každé $r \in (0, 1)$ platí $B_r(x) = \{x\} \subset M$. Jelikož uzavřené množiny jsou doplňky otevřených, vidíme, že každá množina $M \subset X$ je též uzavřená.

Věta 2.6. *Pro každé $x \in X$ a $r > 0$ platí, že otevřená koule $B_r(x)$ je otevřená množina a uzavřená koule $K_r(x)$ je uzavřená množina.*

Důkaz. Volme libovolné $y \in B_r(x)$. Chceme dokázat, že existuje $\rho > 0$ splňující $B_\rho(y) \subset B_r(x)$. Je přirozené volit $\rho = r - d(y, x)$ (nakreslete si obrázek v $\mathbb{R}^2$). Pro každé $z \in B_\rho(y)$ pak platí

$$d(z, x) \le d(z, y) + d(y, x) < \rho + d(y, x) = r,$$

čili $B_\rho(y) \subset B_r(x)$.

Dále chceme dokázat, že $X \setminus K_r(x)$ je otevřená. Volme libovolné $y \in X \setminus K_r(x)$. Tvrdíme, že existuje $\rho > 0$ splňující $B_\rho(y) \subset X \setminus K_r(x)$. Je přirozené volit $\rho = d(y,x) - r$ (nakreslete si obrázek v $\mathbb{R}^2$). Pro každé $z \in B_\rho(y)$ pak platí

$$d(y,z) + d(z,x) \geq d(y,x),$$

tudíž

$$d(z,x) \geq d(y,x) - d(y,z) > d(y,x) - \rho = r.$$

Z $d(z,x) > r$ plyne $z \in X \setminus K_r(x)$, a proto $B_\rho(y) \subset X \setminus K_r(x)$. □

Následující věta říká, že sjednocení libovolně mnoha otevřených množin je otevřená množina. Analogické tvrzení pro průniky platí jen v případě konečného počtu množin.

Věta 2.7. *V každém metrickém prostoru X platí následující tvrzení:*

1. *Je-li $I \neq \emptyset$ libovolná indexová množina a pro každé $i \in I$ je $M_i \subset X$ otevřená množina, pak $\bigcup_{i \in I} M_i$ je otevřená.*

2. *Jsou-li $M_1, \ldots, M_n \subset X$ otevřené množiny, pak $\bigcap_{i=1}^n M_i$ je otevřená.*

Důkaz. K ověření první části si stačí všimnout, že pokud $x \in \bigcup_{i \in I} M_i$, pak $x \in M_i$ pro některé $i \in I$. Z definice otevřenosti pak existuje $r > 0$ takové, že $B_r(x) \subset M_i \subset \bigcup_{i \in I} M_i$.

Pro důkaz druhé části předpokládejme, že $x \in \bigcap_{i=1}^n M_i$. Pak $x \in M_i$ pro každé $i \in \{1, \ldots, n\}$. Z definice otevřenosti pak existují $r_1, \ldots, r_n > 0$ taková, že $B_{r_i}(x) \subset M_i$. Volíme-li $r = \min(r_1, \ldots, r_n)$, pak $B_r(x) \subset B_{r_i}(x) \subset M_i$ pro každé $i \in \{1, \ldots, n\}$, tudíž $B_r(x) \subset \bigcap_{i=1}^n M_i$. □

Pro uzavřené množiny máme následující variantu předchozí věty.

Věta 2.8. *V každém metrickém prostoru X platí následující tvrzení:*

1. *Je-li $I \neq \emptyset$ libovolná indexová množina a pro každé $i \in I$ je $M_i \subset X$ uzavřená množina, pak $\bigcap_{i \in I} M_i$ je uzavřená.*

2. *Jsou-li $M_1, \ldots, M_n \subset X$ uzavřené množiny, pak $\bigcup_{i=1}^n M_i$ je uzavřená.*

Důkaz. Označme $N_i = X \setminus M_i$; je-li M_i uzavřená, pak N_i je otevřená.

K důkazu první části si stačí uvědomit, že

$$\bigcap_{i \in I} M_i = \bigcap_{i \in I} (X \setminus N_i) = X \setminus \left(\bigcup_{i \in I} N_i \right).$$

Množina vpravo je uzavřená, neboť podle předchozí věty je $\bigcup_{i \in I} N_i$ otevřená.

Důkaz druhé části je podobný:

$$\bigcup_{i=1}^n M_i = \bigcup_{i=1}^n (X \setminus N_i) = X \setminus \left(\bigcap_{i=1}^n N_i \right).$$

Množina vpravo je uzavřená, neboť podle předchozí věty je $\bigcap_{i=1}^n N_i$ otevřená. □

3 Další pojmy

Definice 3.1. *Průměr neprázdné množiny $M \subset X$* je definován jako

$$\operatorname{diam} M = \sup\{d(x,y) : x, y \in M\}$$

(jde o nezáporné reálné číslo nebo ∞).

Příklad 3.2. V prostoru $X = \mathbb{R}^n$ s eukleidovskou metrikou platí

$$\operatorname{diam} K_r(x) = \operatorname{diam} B_r(x) = 2r,$$

čili průměr koule je dvojnásobkem jejího poloměru.

V každém metrickém prostoru X platí $\operatorname{diam} K_r(x) \leq 2r$, neboť pro všechna $y_1, y_2 \in K_r(x)$ máme

$$d(y_1, y_2) \leq d(y_1, x) + d(x, y_2) \leq 2r.$$

Analogicky se dokáže, že $\operatorname{diam} B_r(x) \leq 2r$.

Obecně však nemusí platit $\operatorname{diam} K_r(x) = \operatorname{diam} B_r(x)$: V diskrétním metrickém prostoru obsahujícím aspoň dva body stačí vzít libovolný bod x a volit $r = 1$; pak $\operatorname{diam} K_r(x) = \operatorname{diam} X = 1$, ale $\operatorname{diam} B_r(x) = \operatorname{diam} \{x\} = 0$ (průměr otevřené koule je tedy menší než její poloměr!).

Definice 3.3. Množina $M \subset X$ se nazývá *omezená*, pokud existují $x \in X$ a $r > 0$ takové, že $M \subset B_r(x)$.

Příklad 3.4. V diskrétním metrickém prostoru je každá množina omezená, neboť se vejde do otevřené koule s libovolným středem a poloměrem větším než 1.

Poznámka 3.5. Rozmyslete si následující pozorování:

- V definici omezené množiny lze místo $B_r(x)$ ekvivalentně psát $K_r(x)$, neboť každá uzavřená koule se vejde do otevřené koule s větším poloměrem.
- Množina je omezená, právě když má konečný průměr.
- Je-li X normovaný lineární prostor, pak v definici omezené množiny stačí uvažovat koule se středem v 0, neboť každá koule se vejde do dostatečně velké koule se středem v 0. Jinými slovy, množina M v normovaném lineárním prostoru je omezená, právě když existuje $r > 0$ takové, že pro každé $y \in M$ platí $\|y\| < r$.

Definice 3.6. *Vzdálenost bodu $x \in X$ od neprázdné množiny $M \subset X$* je číslo

$$d(x, M) = \inf\{d(x,y) : y \in M\}.$$

Vzdálenost dvou neprázdných množin $M, N \subset X$ je číslo

$$d(M, N) = \inf\{d(x,y) : x \in M,\ y \in N\}.$$

Příklad 3.7. Je-li $X = \mathbb{R}$ s eukleidovskou metrikou, pak

$$d(0, (0,1]) = 0, \quad d([0,1],[2,3]) = 1, \quad d([0,1],(1,2)) = 0.$$

Je zřejmé, že pokud $x \in M$, pak $d(x, M) = 0$. První rovnost na předchozím řádku ukazuje, že obrácená implikace neplatí.

4 Cvičení

Cvičení 4.1. V metrickém prostoru $X = \mathbb{R}$ najděte příklad ukazující, že průnik nekonečně mnoha otevřených množin nemusí být otevřená množina.

Cvičení 4.2. V metrickém prostoru $X = \mathbb{R}$ najděte příklad ukazující, že sjednocení nekonečně mnoha uzavřených množin nemusí být uzavřená množina.

Cvičení 4.3. Najděte příklad metrického prostoru a dvou jeho podmnožin, které jsou uzavřené, disjunktní a mají nulovou vzdálenost.

Cvičení 4.4. Ověřte, že funkce

$$d(a,b) = \left|\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right|, \quad a, b \in \mathbb{N},$$

je metrika na množině $\mathbb{N}$. Popište, jak v tomto metrickém prostoru vypadají omezené množiny.

Cvičení 4.5. V prostoru reálných posloupností ℓ^2 s normou $\|\{x_n\}_{n=1}^\infty\|_2 = \sqrt{\sum_{n=1}^\infty x_n^2}$ uvažujme množinu

$$M = \{\{x_n\}_{n=1}^\infty \in \ell^2 : |x_n| \leq 1 \text{ pro každé } n \in \mathbb{N}\}.$$

Je tato množina omezená? Jaký je její průměr?

Řešení:

1. Například $\bigcap_{n=1}^\infty (-1/n, 1/n) = \{0\}$.

2. Například $\bigcup_{n=1}^\infty [1/n, 1] = (0, 1]$.

3. Například $X = \mathbb{R}^2$ s eukleidovskou metrikou, kde vezmeme osu x a hyperbolu $y = 1/x$.

4. Trojúhelníková nerovnost

$$\left|\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right| \leq \left|\frac{1}{a} - \frac{1}{c}\right| + \left|\frac{1}{c} - \frac{1}{b}\right|$$

plyne z trojúhelníkové nerovnosti pro absolutní hodnotu $|x - y| \leq |x - z| + |z - y|$ volbou $x = 1/a$, $y = 1/b$, $z = 1/c$. Ostatní vlastnosti metriky jsou zřejmé.
Z definice plyne $d(a,b) < 1$ pro všechna $a, b \in \mathbb{N}$, tedy každá množina je omezená, neboť se vejde do koule s libovolným středem a poloměrem 1.

5. Pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí, že posloupnost $(1, \ldots, 1, 0, \ldots)$, která je tvořena k jedničkami a poté samými nulami, je prvkem množiny M. Vzdálenost této posloupnosti od nulové posloupnosti, která je rovněž prvkem M, je

$$\|(1, \ldots, 1, 0, \ldots) - (0, 0, \ldots)\|_2 = \|(1, \ldots, 1, 0, \ldots)\|_2 = \sqrt{k}.$$

Jelikož $\sqrt{k}$ může být libovolně velké číslo, musí být průměr množiny M nekonečný a množina není omezená.