

Matematická analýza VI – vzorová písemka

1. Nechť $p \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Najděte Fourierovu řadu funkce

$$f(x) = \sin(px), \quad x \in [-\pi, \pi],$$

a vyšetřete její konvergenci. Vhodnou volbou x získejte součet řady

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k+1)}{(2k+1)^2 - p^2}.$$

Pomocí Parsevalovy rovnosti vypočítejte součet řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n^2 - p^2)^2}.$$

Návod: Při výpočtu Fourierových koeficientů použijte vztah

$$\sin a \cdot \sin b = \frac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b)), \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

(4 body)

2. Najděte komplexní Fourierovu řadu funkce

$$f(x) = x \cdot e^{ix}, \quad x \in [-\pi, \pi],$$

a vyšetřete její konvergenci.

(2 body)

K úspěšnému napsání písemky je potřeba získat aspoň 4 body.

Výsledky vzorové písemky si můžete ověřit na další straně.

Další úlohy vhodné k přípravě na písemku lze najít např. v knize B. P. Děmidovič: *Sbírka úloh a cvičení z matematické analýzy*, Fragment, 2003 (k dispozici v knihovně MFF UK).

Výsledky vzorové písemky

1. Fourierova řada je

$$F(x) = \frac{2}{\pi} \sin(p\pi) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n}{n^2 - p^2} \sin(nx).$$

Konvergence: $F(x) = f(x)$ pro $x \in (-\pi, \pi)$, $F(\pm\pi) = 0$.

Po dosazení $x = \pi/2$ a úpravě (z řady zbydou pouze členy $n = 2k + 1$ a platí $\sin((2k + 1)\pi/2) = (-1)^k$) vyjde

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k + 1)}{(2k + 1)^2 - p^2} = \frac{\pi \sin(p\pi/2)}{2 \sin(p\pi)}.$$

Parsevalova rovnost po dosazení a úpravě dává

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n^2 - p^2)^2} = \frac{\pi^2}{4 \sin^2(p\pi)} \left(1 - \frac{\sin(2p\pi)}{2p\pi} \right).$$

2. Fourierova řada je

$$F(x) = \sum_{n=-\infty}^0 \frac{i(-1)^{n+1}}{n-1} e^{inx} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{i(-1)^{n+1}}{n-1} e^{inx}.$$

Konvergence: $F(x) = f(x)$ pro $x \in (-\pi, \pi)$, $F(\pm\pi) = 0$.