Písemka 26. 5. 2020

① např. $X = \mathbb{R}$, $M = (0,1) \cup (1,2)$

$(\overline{M})^0 = (0,2) \neq M$

② $f_n \to 0$ v L^p $\iff$ $\|f_n\|_p \to 0$

$\|f_n\|_p = \left(\int_0^1 |f_n(x)|^p\,dx\right)^{1/p} = \left(\int_{1/n}^{2/n} n^{p/2}\,dx\right)^{1/p} = \left(n^{p/2-1}\right)^{1/p} =$

$= n^{1/2-1/p}$

konverguje k 0 pro $n \to \infty$ $\iff$ $\frac{1}{2} - \frac{1}{p} < 0 \iff p < 2$

③ $x_0 = 2$, $x_n = f(x_{n-1})$ $\forall n \in \mathbb{N}$, kde $f(x) = \frac{1}{3}\left(2x + \frac{3}{x^2}\right)$

pevné body f: $x = f(x) = \frac{1}{3}\left(2x + \frac{3}{x^2}\right)$

$3x = 2x + \frac{3}{x^2}$

$x = 3/x^2$

$x^3 = 3$

$x = \sqrt[3]{3}$

$\frac{1}{3}\left(2x + \frac{3}{x^2}\right) = \frac{1}{3}\left(x + x + \frac{3}{x^2}\right) \overset{AG}{\geq} \sqrt[3]{x \cdot x \cdot \frac{3}{x^2}} = \sqrt[3]{3}$

$\Rightarrow$ f zobrazuje $[\sqrt[3]{3}, \infty)$ do $[\sqrt[3]{3}, \infty)$ ... je to uzavřená podmnožina $\mathbb{R}$, tedy úplný MP

$f'(x) = \frac{1}{3}\left(2 - \frac{6}{x^3}\right)$

$\forall x \in [\sqrt[3]{3}, \infty)$ $0 \leq f'(x) < \frac{2}{3}$ $\Rightarrow$ f je kontrakce na $[\sqrt[3]{3}, \infty)$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt[3]{3}$

④ $f \in M \iff f > 0$ na $[0,1]$ nebo $f < 0$ na $[0,1]$

$f \in M$, $r = \inf_{x\in[0,1]} f(x)$ $\Rightarrow$ $B_r(f) \subset M$ $\Rightarrow$ každý bod M je vnitřní

M je otevřená, $M^0 = M$

$f \in \overline{M} \Rightarrow f \geq 0$ na $[0,1]$ nebo $f \leq 0$ na $[0,1]$

ke každé nezáp. nebo nekladné fci lze dokonvergovat posloupností z M (např. $f_n = f + \frac{1}{n}$, resp. $f_n = f - \frac{1}{n}$)

$\Rightarrow \overline{M} = \{ f \in C([0,1]) ;\ f \geq 0$ na $[0,1]$ nebo $f \leq 0$ na $[0,1] \}$

M není uzavřená

$\partial M = \{ f \in C([0,1]) : f \geq 0$ nebo $f \leq 0$ a $\exists x\ f(x) = 0 \}$

vnější body = funkce z $C([0,1])$, které mění znaménko

(5) c není hustá v ℓ^∞, sporem:

$x = (0, 1, 0, 1, \ldots) \in \ell^\infty$

$\exists y \in c \quad \|x - y\|_\infty < \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \forall n$ sudé $\quad y_n \in (\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$

$\forall n$ liché $\quad y_n \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

$\Leftarrow$

$y \notin c \quad \Leftarrow \quad \nexists \lim_{n \to \infty} y_n$