Matematická analýza VI – vzorová písemka

1. Nechť $\mathcal{C}^2([-\pi,\pi])$ značí vektorový prostor všech reálných funkcí definovaných na intervalu $[-\pi,\pi]$, které jsou dvakrát spojitě diferencovatelné. Rozhodněte, zda je předpisem

$$f \cdot g = f(-\pi)g(-\pi) + \int_{-\pi}^{\pi} f''(x)g''(x)\,\mathrm{d}x$$

definován skalární součin na $\mathcal{C}^2([-\pi,\pi])$.

2. V metrickém prostoru $X = \mathbb{R}$ uvažujme množinu $M = \{x \in \mathbb{Q};\ x^2 < 2\}$. Je tato množina otevřená, případně uzavřená? Jak vypadá její vnitřek a uzávěr? Jaké budou odpovědi na předchozí otázky, jestliže budeme M uvažovat jako podmnožinu metrického prostoru $X = \mathbb{Q}$?

3. Najděte příklad metrického prostoru X a množin A, $B \subset X$ takových, že $A \subsetneq B$ a $\partial B \subsetneq \partial A$.

4. V metrickém prostoru $X = \mathbb{R}$ najděte příklad množiny, jejíž hromadné body jsou právě všechna přirozená čísla.

5. Na vektorovém prostoru $X = \mathcal{C}([0,1])$ uvažujme suprémovou normu

$$\|f\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|, \qquad f \in X$$

a integrální normu

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t, \qquad f \in X.$$

Mějme posloupnost funkcí $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ definovaných předpisem $f_n(t) = t^n$, $t \in [0,1]$. Je tato posloupnost konvergentní vzhledem k suprémové, případně integrální normě? Pokud ano, jakou má limitu?

Každá úloha je hodnocena max. 2 body, k úspěšnému napsání písemky je potřeba získat aspoň 6 bodů.

Výsledky vzorové písemky si můžete ověřit na další straně.

Výsledky vzorové písemky

1. Nejedná se o skalární součin, neboť není splněna podmínka $f \cdot f = 0 \Rightarrow f = 0$ (protipříklad: $f(x) = x + \pi$).

2. V prostoru $\mathbb{R}$ není M otevřená ani uzavřená, $M^\circ = \emptyset$, $\overline{M} = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$. V prostoru $\mathbb{Q}$ je M otevřená i uzavřená, $M^\circ = M$, $\overline{M} = M$.

3. Např. $X = \mathbb{R}$, $A = [0,1) \cup (1,2]$, $B = [0,2]$.

4. Např. $\{n + \frac{1}{m};\, n, m \in \mathbb{N}\}$.

5. V suprémové normě posloupnost nekonverguje, neboť není stejnoměrně konvergentní. V integrální konverguje k nulové funkci, neboť $\|f_n\|_1 = \frac{1}{n+1} \to 0$.