Matematická analýza VI

Antonín Slavík

Matematicko-fyzikální fakulta UK

Vytvořeno v rámci projektu
Podpora zkvalitnění přípravy učitelů matematiky, fyziky a informatiky na MFF UK, 2020.

Poslední aktualizace: 25. května 2023

Obsah

Kapitola 1

Fourierovy řady

1.1 Motivační úvahy

Naším cílem je studium periodických funkcí na reálné ose. Budeme uvažovat funkce s reálnými i komplexními hodnotami. V následujících úvahách se zaměříme na 2π-periodické funkce, pro které je teorie nejjednodušší. Později si rozmyslíme, co se změní v případě funkcí s jinou periodou (viz část 1.8).

Nejjednoduššími příklady 2π-periodických funkcí na reálné ose jsou

- konstantní funkce,
- funkce $x \mapsto \sin(nx)$, kde $n \in \mathbb{N}$,
- funkce $x \mapsto \cos(nx)$, kde $n \in \mathbb{N}$.

Samozřejmě i každá lineární kombinace výše uvedených funkcí je 2π-periodická; takové lineární kombinace se nazývají reálné trigonometrické polynomy.

Definice 1.1.1. *Reálný trigonometrický polynom* je každá funkce tvaru

$$t(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{k} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{1.1.1}$$

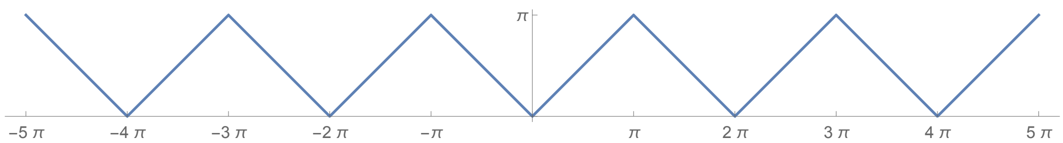
kde a_0, a_n, b_n jsou reálná čísla a k je přirozené číslo, tzv. stupeň trigonometrického polynomu.

Místo členu $\frac{a_0}{2}$, který ve vztahu (1.1.1) představuje konstantní funkci, by bylo možné psát pouze a_0. Později uvidíme (viz poznámku 1.1.9), proč je výhodnější pracovat s konstantou $\frac{a_0}{2}$.

Existují kromě trigonometrických polynomů i jiné spojité 2π-periodické reálné funkce? Ano, stačí vzít libovolnou 2π-periodickou funkci, která v nějakém bodě nemá derivaci (s ohledem na periodicitu pak nemá derivaci v nekonečně mnoha bodech). Jako příklad poslouží např. „pilovitá“ funkce, kterou získáme jako 2π-periodické rozšíření funkce $x \mapsto |x|$, $x \in [-\pi, \pi]$, na celou reálnou osu, viz obr. 1.1. Tato funkce nemá derivaci v bodech $n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, a tudíž ji nelze vyjádřit trigonometrickým polynomem, který má derivaci všude na $\mathbb{R}$.

Platí však následující věta, která říká, že spojité 2π-periodické funkce lze s libovolnou přesností aproximovat trigonometrickými polynomy.

Věta 1.1.2. *Je-li $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spojitá 2π-periodická funkce a $\varepsilon > 0$, pak existuje reálný trigonometrický polynom t takový, že pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $|f(x) - t(x)| < \varepsilon$.*



Obrázek 1.1: Pilovitá funkce

Důkaz této věty prozatím odložíme a provedeme jej v části 1.4 (viz větu 1.4.6).

Chceme-li zkoumat i komplexní periodické funkce, mohli bychom uvažovat trigonometrické polynomy (1.1.1) s komplexními koeficienty a_0, a_n, b_n – dostali bychom funkce, jejichž reálné i imaginární části jsou reálné trigonometrické polynomy. Místo toho lze ekvivalentně pracovat s komplexní exponenciálou: Připomeňme, že pro každé $z \in \mathbb{C}$ platí

$$\mathrm{e}^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + \frac{z^1}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots .$$

Mocninná řada na pravé straně má nekonečný poloměr konvergence a lze ji derivovat člen po členu, čímž stejně jako v reálném oboru získáme vztah $(\mathrm{e}^z)' = \mathrm{e}^z$. Důležitý je vztah mezi komplexní exponenciálou a goniometrickými funkcemi: Pro každé $x \in \mathbb{R}$ máme

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} &= 1 + \frac{(\mathrm{i}x)^1}{1!} + \frac{(\mathrm{i}x)^2}{2!} + \frac{(\mathrm{i}x)^3}{3!} + \cdots = \\ &= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots\right) + \mathrm{i}\left(\frac{x^1}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots\right) = \cos x + \mathrm{i}\sin x\end{aligned}$$

a dále

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} = \cos(-x) + \mathrm{i}\sin(-x) = \cos x - \mathrm{i}\sin x = \overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}.$$

Sečtením, resp. odečtením předchozích dvou vztahů získáme

$$\cos x = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2}, \quad \sin x = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}}. \tag{1.1.2}$$

Budeme potřebovat ještě dvě vlastnosti komplexní exponenciály: Pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí

$$|\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}| = |\cos x + \mathrm{i}\sin x| = \sqrt{\cos^2 x + \sin^2 x} = 1$$

a ze vztahu $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = \cos x + \mathrm{i}\sin x$ je zřejmé, že $x \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$ je 2π-periodická funkce na $\mathbb{R}$. Obecněji, pro každé $n \in \mathbb{Z}$ je funkce $x \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}$ 2π-periodická. Lineární kombinace takových funkcí se nazývají komplexními trigonometrickými polynomy.

Definice 1.1.3. *Komplexní trigonometrický polynom* je každá funkce tvaru

$$t(x) = \sum_{n=-k}^{k} c_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{1.1.3}$$

kde c_n jsou komplexní čísla a k je přirozené číslo, tzv. stupeň trigonometrického polynomu.

S využitím vztahů (1.1.2) lze každý reálný trigonometrický polynom převést do tvaru komplexního trigonometrického polynomu. Platí

$$a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx) = a_n\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}}{2} + b_n\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}}{2\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}\left(\frac{a_n - \mathrm{i}b_n}{2}\right) + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}\left(\frac{a_n + \mathrm{i}b_n}{2}\right), \tag{1.1.4}$$

tudíž

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{k}(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{k}\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}\left(\frac{a_n - \mathrm{i}b_n}{2}\right) + \sum_{n=1}^{k}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}\left(\frac{a_n + \mathrm{i}b_n}{2}\right) = \sum_{n=-k}^{k} c_n\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx},$$

kde $c_0 = \frac{a_0}{2}$ a pro každé $n \in \{1, \dots, k\}$ platí

$$c_n = \frac{a_n - \mathrm{i}b_n}{2}, \quad c_{-n} = \frac{a_n + \mathrm{i}b_n}{2}.$$

Jsou-li naopak dána libovolná komplexní čísla $c_{-k}, \dots, c_k$, můžeme z předchozích vztahů vyjádřit a_0, a_n, b_n. Dostaneme $a_0 = 2c_0$ a pro každé $n \in \{1, \dots, k\}$

$$a_n = c_n + c_{-n}, \quad b_n = \mathrm{i}(c_n - c_{-n}),$$

což jsou obecně komplexní čísla. Tato úvaha ukazuje, že každý komplexní trigonometrický polynom (1.1.3) lze vyjádřit ve tvaru (1.1.1), pokud připustíme i komplexní koeficienty a_0, a_n, b_n.

Následující tvrzení představuje komplexní verzi věty 1.1.2.

Věta 1.1.4. *Je-li $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ spojitá 2π-periodická funkce a $\varepsilon > 0$, pak existuje komplexní trigonometrický polynom t takový, že pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $|f(x) - t(x)| < \varepsilon$.*

Pro důkaz stačí rozložit f na reálnou a imaginární část a použít větu 1.1.2. V části 1.4 však dokážeme přímo komplexní verzi (viz větu 1.4.6).

Každou komplexní spojitou 2π-periodickou funkci tedy lze s libovolnou přesností aproximovat komplexními trigonometrickými polynomy. Dá se očekávat, že při zvyšování přesnosti, tj. snižování ε, budeme potřebovat vyšší stupeň polynomu, tj. vyšší k. Pokud bychom připustili „trigonometrické polynomy nekonečného stupně“, tj. řady tvaru $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}$, byli bychom schopni tímto způsobem vyjádřit libovolnou spojitou 2π-periodickou funkci? To je jedna z hlavních otázek, které se budeme věnovat.

Definice 1.1.5. *Komplexní trigonometrická řada* je každá řada tvaru

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{1.1.5}$$

kde c_n jsou komplexní čísla.

Místo zápisu (1.1.5) lze používat i tvar $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}$. Součet nekonečné řady (1.1.5) je definován jako limita jejích částečných součtů, tj.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx} = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=-k}^{k} c_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}.$$

V definici 1.1.5 se ovšem nepožaduje, aby řada (1.1.5) byla konvergentní – otázkou konvergence se teprve budeme zabývat.

Pokud bychom věděli, že funkci $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ lze rozvinout do trigonometrické řady, která je dokonce stejnoměrně konvergentní, pak následující věta udává způsob, jak vypočítat příslušné koeficienty.

Věta 1.1.6. *Nechť pro spojitou 2π-periodickou funkci $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ platí $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}$, přičemž tato řada je stejnoměrně konvergentní na $\mathbb{R}$. Pak*

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx} \,\mathrm{d}x, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{1.1.6}$$

Důkaz. Volme libovolné $n \in \mathbb{Z}$. Podle předpokladů platí

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m \mathrm{e}^{\mathrm{i}mx} \right) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m \mathrm{e}^{\mathrm{i}mx} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx} \,\mathrm{d}x.$$

Ze skutečnosti, že částečné součty $\sum_{m=-k}^{k} c_m e^{imx}$ konvergují pro $k \to \infty$ stejnoměrně k $f(x)$, vyplývá,[1] že součty $\sum_{m=-k}^{k} c_m e^{imx} e^{-inx}$ konvergují stejnoměrně k $f(x)e^{-inx}$. Můžeme proto použít větu o záměně pořadí sumy a Riemannova integrálu a dostaneme

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,dx = \frac{1}{2\pi}\sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(m-n)x}\,dx. \tag{1.1.7}$$

Pro $m = n$ platí $\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(m-n)x}\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} 1\,dx = 2\pi$, zatímco pro $m \neq n$ vychází

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(m-n)x}\,dx = \left[\frac{e^{i(m-n)x}}{i(m-n)}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0,$$

kde poslední rovnost plyne z 2π-periodicity funkce $x \mapsto e^{i(m-n)x}$. To znamená, že nekonečný součet v (1.1.7) se redukuje na jediného sčítance a platí

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,dx = c_n. \qquad \square$$

Věta 1.1.6 se na první pohled nezdá být příliš užitečná, neboť zatím nevíme, za jakých okolností lze 2π-periodickou spojitou funkci $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ rozvinout do trigonometrické řady. Nabízí se však následující postup: Je-li dána funkce f, vypočteme koeficienty c_n podle vzorce (1.1.6) a sestavíme z nich trigonometrickou řadu $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$. Pokud je tento nápad správný, mohla by trigonometrická řada konvergovat k funkci f. Naším cílem je zjistit, pro jaké funkce tento postup funguje.

Všimněme si, že k výpočtu c_n není nezbytně nutné, aby f byla spojitá a 2π-periodická. Stačí, když integrál ve vzorci (1.1.6) existuje a má konečnou hodnotu. Pro $n = 0$ dostáváme

$$c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$$

a stačí požadovat, aby $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ byla měřitelná funkce, jejíž Lebesgueův integrál $\int_{-\pi}^{\pi} f$ konverguje[2], neboli $\int_{-\pi}^{\pi} |f| < \infty$. S těmito podmínkami vystačíme i pro $n \neq 0$: Použijeme odhad $|f(x)e^{-inx}| \leq |f(x)|$ a dostáváme

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)e^{-inx}|\,dx \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|\,dx < \infty,$$

tedy integrál $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,dx$ v definici c_n konverguje.

Připomeňme, že pokud $p \in [1, \infty)$, pak množina všech měřitelných funkcí $f : [a, b] \to \mathbb{C}$, pro něž Lebesgueův integrál $\int_a^b |f|^p$ konverguje, se značí symbolem $L^p([a, b])$.

Ukázali jsme, že podmínka $f \in L^1([-\pi, \pi])$ je nutná i postačující k tomu, aby definice koeficientů c_n byla korektní. Tyto koeficienty se nazývají Fourierovými koeficienty a příslušná trigonometrická řada se nazývá Fourierovou řadou.

Definice 1.1.7. Pro libovolnou funkci $f \in L^1([-\pi, \pi])$ se čísla

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,dx, \quad n \in \mathbb{Z},$$

nazývají *komplexními Fourierovými koeficienty* funkce f. Komplexní trigonometrická řada

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)e^{inx}, \quad x \in \mathbb{R},$$

se nazývá *komplexní Fourierovou řadou* funkce f.

[1] Jde o speciální případ obecného tvrzení: Pokud posloupnost funkcí $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ konverguje na intervalu I stejnoměrně k funkci f a g je omezená funkce na I, pak $\{f_k g\}_{k=1}^{\infty}$ konverguje stejnoměrně k fg, neboť $|f_k(x)g(x) - f(x)g(x)| = |g(x)| \cdot |f_k(x) - f(x)|$.

[2] Měřitelnost a integrál komplexní funkce reálné proměnné je definován pomocí rozkladu na reálnou a imaginární část: Funkce $f = f_1 + if_2$ je měřitelná, pokud f_1, f_2 jsou měřitelné. Definujeme $\int_X f = \int_X f_1 + i\int_X f_2$, pokud integrály na pravé straně konvergují.

Řešíme tedy následující problém: Za jakých okolností platí, že Fourierova řada funkce $f \in L^1([-\pi, \pi])$ konverguje a její součet je roven funkci f?

Poznámka 1.1.8. Není těžké si rozmyslet, že pokud f je reálná funkce, pak částečné součty její Fourierovy řady jsou reálné: Pro každé $x \in [-\pi, \pi]$ platí $\overline{f(x)} = f(x)$. Z definice Fourierových koeficientů pak pro každé $n \in \mathbb{Z}$ plyne $\overline{\hat{f}(n)} = \hat{f}(-n)$. Rovnost

$$s_k(x) = \sum_{n=-k}^{k} \hat{f}(n)\mathrm{e}^{inx} = \sum_{n=-k}^{k} \hat{f}(-n)\mathrm{e}^{-inx} = \overline{s_k(x)}$$

dokazuje, že $s_k(x)$ je reálné číslo.

Poznámka 1.1.9. Místo komplexních trigonometrických řad ve tvaru $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \mathrm{e}^{inx}$ bychom mohli ekvivalentně pracovat s *reálnými trigonometrickými řadami* ve tvaru

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)). \tag{1.1.8}$$

K objasnění vztahu mezi oběma tvary stačí zopakovat úvahy, které jsme provedli u trigonometrických polynomů. Ze vztahu (1.1.4) plyne, že každou řadu tvaru (1.1.8) lze vyjádřit i ve tvaru $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \mathrm{e}^{inx}$, kde

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, \quad c_n = \frac{a_n - \mathrm{i}b_n}{2}, \quad c_{-n} = \frac{a_n + \mathrm{i}b_n}{2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Pokud naopak z těchto vztahů vyjádříme a_0, a_n a b_n, dostaneme

$$a_0 = 2c_0, \quad a_n = c_n + c_{-n}, \quad b_n = \mathrm{i}(c_n - c_{-n}), \quad n \in \mathbb{N},$$

a tímto způsobem lze převést řadu $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \mathrm{e}^{inx}$ na řadu tvaru (1.1.8) s obecně komplexními koeficienty a_0, a_n, b_n.

Pokud nepracujeme s obecnou trigonometrickou řadou, ale s Fourierovou řadou funkce $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$, pak se koeficienty c_n shodují s Fourierovými koeficienty a dostaneme

$$\begin{aligned}
a_0 &= 2c_0 = 2\hat{f}(0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x, \\
a_n &= c_n + c_{-n} = \hat{f}(n) + \hat{f}(-n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx})\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x, \quad n \in \mathbb{N}, \\
b_n &= \mathrm{i}(c_n - c_{-n}) = \frac{\hat{f}(n) - \hat{f}(-n)}{-\mathrm{i}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}}{-\mathrm{i}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x, \quad n \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

Všimněme si ještě, že vztah pro výpočet a_n se po dosazení $n = 0$ redukuje na vztah pro výpočet a_0. Místo tří vzorců tedy stačí uvažovat následující dva:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x, \quad n \in \mathbb{N}_0, \tag{1.1.9}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{1.1.10}$$

To je i důvod, proč je zvykem uvádět konstantní člen v reálných trigonometrických polynomech a řadách ve tvaru $\frac{a_0}{2}$ místo a_0; ve druhém případě by se totiž koeficient a_0 počítal podle odlišného vzorce $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Je-li funkce f reálná, pak ze vztahů pro a_n, b_n je zřejmé, že jde o reálná čísla; nazývají se *reálnými Fourierovými koeficienty* funkce f a řada (1.1.8) se nazývá *reálnou Fourierovou řadou* funkce f. S tímto tvarem pracoval francouzský matematik Joseph Fourier (1768–1830), který při studiu úlohy o vedení tepla odvodil vztahy (1.1.9), (1.1.10). Dospěl k nim podobným (avšak podstatně méně rigorózním) způsobem jako v důkazu věty 1.1.6. Při teoretických úvahách, jako je např. vyšetřování konvergence Fourierových řad, je ovšem pohodlnější pracovat s komplexním tvarem.[3]

[3]Zájemcům o historii Fourierových řad lze doporučit pěkný článek J. Veselý: *Jedno fourierovské výročí*, který je dostupný na webu https://dml.cz/handle/10338.dmlcz/141368.

1.2 Konvergence Fourierových řad

Dokážeme dvě pomocná tvrzení, která vzápětí využijeme k vyšetření konvergence Fourierových řad.

O funkci $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ řekneme, že je *po částech spojitá*, pokud je spojitá na $[a, b]$ s výjimkou konečně mnoha bodů, ve kterých má konečné jednostranné limity. Každá po částech spojitá funkce je omezená.[4] O komplexní funkci $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ řekneme, že je po částech spojitá, pokud její reálná a imaginární složka jsou po částech spojité funkce.

Věta 1.2.1 (Riemannovo-Lebesgueovo lemma)**.** *Je-li $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ po částech spojitá, pak platí:*

(i) $\lim_{\omega\to\pm\infty} \int_a^b f(x)\sin(\omega x)\,\mathrm{d}x = 0.$

(ii) $\lim_{\omega\to\pm\infty} \int_a^b f(x)\cos(\omega x)\,\mathrm{d}x = 0.$

(iii) $\lim_{\omega\to\pm\infty} \int_a^b f(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x}\,\mathrm{d}x = 0.$

Důkaz. Tvrzení (iii) plyne z tvrzení (i), (ii) a ze vztahu $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x} = \cos(\omega x) + \mathrm{i}\sin(\omega x)$. Tvrzení (i), (ii) stačí dokázat pro reálné funkce f, pro komplexní funkce pak plynou z rozkladu na reálnou a imaginární část. Navíc stačí uvažovat limity pro $\omega \to \infty$, verze pro $\omega \to -\infty$ pak snadno plynou ze sudosti kosinu a lichosti sinu.

Podívejme se na dvojnásobek integrálu z dokazovaného tvrzení (i):

$$\begin{aligned}2\int_a^b f(x)\sin(\omega x)\,\mathrm{d}x = \int_a^{a+\pi/\omega} f(x)\sin(\omega x)\,\mathrm{d}x + \int_{a+\pi/\omega}^b f(x)\sin(\omega x)\,\mathrm{d}x+\\ + \int_a^{b-\pi/\omega} f(x)\sin(\omega x)\,\mathrm{d}x + \int_{b-\pi/\omega}^b f(x)\sin(\omega x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Třetí sčítanec přepíšeme pomocí substituce následujícím způsobem:

$$\begin{aligned}\int_a^{b-\pi/\omega} f(x)\sin(\omega x)\,\mathrm{d}x = \int_{a+\pi/\omega}^b f(x-\pi/\omega)\sin(\omega(x-\pi/\omega))\,\mathrm{d}x =\\ = \int_{a+\pi/\omega}^b f(x-\pi/\omega)\sin(\omega x-\pi)\,\mathrm{d}x = -\int_{a+\pi/\omega}^b f(x-\pi/\omega)\sin(\omega x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Po dosazení zpět do předchozího vztahu dostáváme

$$\begin{aligned}2\int_a^b f(x)\sin(\omega x)\,\mathrm{d}x = \int_a^{a+\pi/\omega} f(x)\sin(\omega x)\,\mathrm{d}x+\\ + \int_{a+\pi/\omega}^b (f(x) - f(x-\pi/\omega))\sin(\omega x)\,\mathrm{d}x + \int_{b-\pi/\omega}^b f(x)\sin(\omega x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Funkce f je omezená, tudíž existuje $M > 0$ takové, že $|f(x)| \leq M$ pro všechna $x \in [a, b]$. Odtud s využitím odhadu $|\sin(\omega x)| \leq 1$ a předchozí rovnosti plyne

$$\left|2\int_a^b f(x)\sin(\omega x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \frac{\pi}{\omega}M + \int_{a+\pi/\omega}^b |f(x) - f(x-\pi/\omega)|\,\mathrm{d}x + \frac{\pi}{\omega}M.$$

První a třetí sčítanec na pravé straně konvergují pro $\omega \to \infty$ k nule. Vyšetřeme limitu druhého sčítance:

$$\lim_{\omega\to\infty}\int_{a+\pi/\omega}^b |f(x) - f(x-\pi/\omega)|\,\mathrm{d}x = \lim_{\omega\to\infty}\int_a^b \chi_{[a+\pi/\omega,b]}(x)|f(x) - f(x-\pi/\omega)|\,\mathrm{d}x.$$

[4] Důkaz je téměř stejný jako pro spojité funkce, stačí uvažovat posloupnost $x_n \in [a, b]$ takovou, že $\lim_{n\to\infty} x_n = \pm\infty$, a dojít ke sporu.

Díky Lebesgueově větě můžeme zaměnit pořadí limity a integrálu, neboť integrovaná funkce má majorantu $2M$. Ve všech bodech $x \in [a,b]$, kde je f spojitá, tedy skoro všude na intervalu $[a,b]$, platí $\lim_{\omega\to\infty} |f(x) - f(x-\pi/\omega)| = 0$. Podle Lebesgueovy věty tedy dostáváme

$$\lim_{\omega\to\infty} \int_{a+\pi/\omega}^{b} |f(x) - f(x-\pi/\omega)|\,\mathrm{d}x = 0,$$

čímž je dokončen důkaz tvrzení (i). Důkaz tvrzení (ii) je obdobný a přenecháváme jej čtenáři. □

Poznámka 1.2.2. Riemannovo-Lebesgueovo lemma platí nejen pro po částech spojité funkce, ale obecněji pro všechny funkce $f \in L^1([a,b])$. Důkaz je založen na aproximaci funkce f spojitými funkcemi: Pro každé $\varepsilon > 0$ lze najít spojitou funkci $g : [a,b] \to \mathbb{C}$ takovou, že $\int_a^b |f-g| < \varepsilon$ (viz větu 1.6.2). Např. k důkazu vztahu $\lim_{\omega\to\infty} \int_a^b f(x)\sin(\omega x)\,\mathrm{d}x = 0$ pak stačí použít odhad

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(x)\sin(\omega x)\,\mathrm{d}x\right| &\le \left|\int_a^b (f(x)-g(x))\sin(\omega x)\,\mathrm{d}x\right| + \left|\int_a^b g(x)\sin(\omega x)\,\mathrm{d}x\right| \le \\ &\le \int_a^b |f(x)-g(x)|\,\mathrm{d}x + \left|\int_a^b g(x)\sin(\omega x)\,\mathrm{d}x\right| < \varepsilon + \left|\int_a^b g(x)\sin(\omega x)\,\mathrm{d}x\right|\end{aligned}$$

a aplikovat větu 1.2.1 na druhý sčítanec; podobně se dokáží i další dva vztahy.

Integrály v definici komplexních i reálných Fourierových koeficientů jsou speciálními případy integrálů, které vystupují v Riemannově-Lebesgueově lemmatu; stačí volit $a = -\pi$, $b = \pi$. Důsledkem obecné verze lemmatu je tedy skutečnost, že pro Fourierovy koeficienty libovolné funkce $f \in L^1([-\pi,\pi])$ platí $\lim_{n\to\pm\infty} \hat{f}(n) = 0$, resp. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0 = \lim_{n\to\infty} b_n$. Je proto splněna nutná (avšak nikoliv postačující) podmínka pro konvergenci komplexní, resp. reálné Fourierovy řady.

Zároveň vidíme, že ne každá trigonometrická řada je Fourierovou řadou nějaké funkce $f \in L^1([-\pi,\pi])$. Stačí vzít např. trigonometrickou řadu $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}$, kde $c_n = 1$ pro všechna $n \in \mathbb{Z}$. Kdyby platilo $c_n = \hat{f}(n)$ pro nějakou funkci $f \in L^1([-\pi,\pi])$, měli bychom $\lim_{n\to\pm\infty} c_n = 0$, což je spor.

V následujícím lemmatu popíšeme vlastnosti jisté funkce D_k, která se nazývá *Dirichletovo jádro*. Vzápětí uvidíme, že pomocí této funkce lze vyjádřit částečné součty Fourierovy řady.

Lemma 1.2.3. *Nechť $k \in \mathbb{N}_0$. Pak pro funkci*

$$D_k(x) = \sum_{n=-k}^{k} \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}, \quad x \in \mathbb{R},$$

platí vztahy

$$D_k(x) = \frac{\sin(k+\frac{1}{2})x}{\sin\frac{x}{2}}, \quad x \ne j\cdot 2\pi, \quad j \in \mathbb{Z},$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} D_k(x)\,\mathrm{d}x = 1 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} D_k(x)\,\mathrm{d}x.$$

Důkaz. Součet v definici funkce D_k je součet členů konečné geometrické posloupnosti s kvocientem $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$, který je pro $x \ne j\cdot 2\pi$ různý od jedné a tudíž

$$\begin{aligned}D_k(x) &= \sum_{n=-k}^{k} (\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})^n = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\frac{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}x(2k+1)}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x(k+1/2)}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x(k+1/2)} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}x(k+1/2)})}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x/2}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x/2} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}x/2})} = \\ &= \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x(k+1/2)} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}x(k+1/2)}}{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x/2} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}x/2}} = \frac{-2\mathrm{i}\sin(k+\frac{1}{2})x}{-2\mathrm{i}\sin\frac{x}{2}} = \frac{\sin(k+\frac{1}{2})x}{\sin\frac{x}{2}}.\end{aligned}$$

Dále platí

$$D_k(x) = \sum_{n=-k}^{k} (\cos(nx) + \mathrm{i}\sin(nx)) = 1 + 2\sum_{n=1}^{k} \cos(nx), \tag{1.2.1}$$

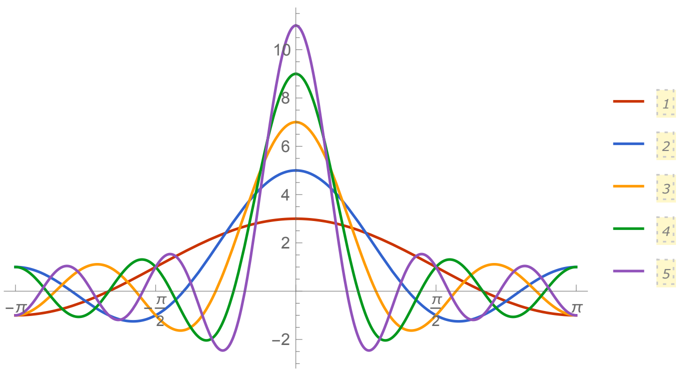
neboť $\cos(-nx) = \cos(nx)$ a $\sin(-nx) = -\sin(nx)$. Dostáváme tedy

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi D_k(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \left(1 + 2\sum_{n=1}^{k}\cos(nx)\right)\mathrm{d}x = 1 + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{k}\int_0^\pi \cos(nx)\,\mathrm{d}x = 1 + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{k}\left[\frac{\sin(nx)}{n}\right]_0^\pi = 1.$$

Ze vztahu (1.2.1) je zřejmé, že D_k je sudá funkce, a tedy

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} D_k(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi D_k(x)\,\mathrm{d}x = 1. \qquad \square$$

V definici Dirichletova jádra sice vystupují komplexní exponenciály, ze vztahu (1.2.1) je však vidět, že ve skutečnosti se jedná o reálnou funkci, viz obr. 1.2. Druhá část lemmatu 1.2.3 říká, že průměrná hodnota Dirichletova jádra na intervalech $[-\pi, 0]$ a $[0, \pi]$ je 1.



Obrázek 1.2: Dirichletovo jádro D_n pro $n = 1, \ldots, 5$

K formulaci věty o konvergenci Fourierovy řady budeme potřebovat ještě následující pojem: Řekneme, že funkce $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ je *po částech diferencovatelná*, pokud existuje dělení

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

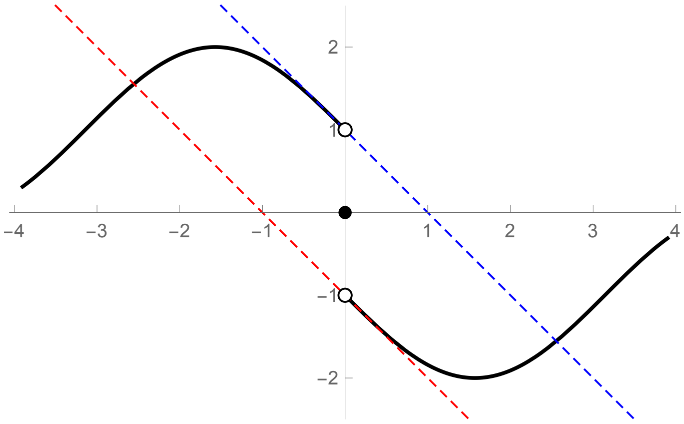
takové, že

- f je diferencovatelná na (x_{i-1}, x_i) pro každé $i \in \{1, \ldots, n\}$,
- pro každé $i \in \{0, \ldots, n-1\}$ existují konečné limity $f(x_i+)$ a $\lim_{h\to 0+} \frac{f(x_i+h)-f(x_i+)}{h}$,
- pro každé $i \in \{1, \ldots, n\}$ existují konečné limity $f(x_i-)$ a $\lim_{h\to 0+} \frac{f(x_i-)-f(x_i-h)}{h}$.

Co znamenají tyto podmínky? V bodech x_i nemusí být funkce diferencovatelná ani spojitá, má však jednostranné limity $f(x_i+)$ a $f(x_i-)$. Pokud bychom změnili funkční hodnotu v bodě x_i na $f(x_i+)$, pak by $\lim_{h\to 0+} \frac{f(x_i+h)-f(x_i+)}{h}$ odpovídala pravé derivaci, tj. existenci „tečny zprava“. Pokud bychom naopak změnili funkční hodnotu v bodě x_i na $f(x_i-)$, pak by $\lim_{h\to 0+} \frac{f(x_i-)-f(x_i-h)}{h}$ odpovídala levé derivaci, tj. existenci „tečny zleva“. Situaci znázorňuje obr. 1.3.

Komplexní funkce $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ se nazývá po částech diferencovatelná, pokud její reálná a imaginární složka jsou po částech diferencovatelné.

Nyní již máme vše připraveno k vyšetření konvergence Fourierovy řady.



Obrázek 1.3: Příklad po částech diferencovatelné funkce. V bodě $x = 0$ není funkce spojitá, má však jednostranné limity a „jednostranné tečny".

Věta 1.2.4. *Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ je 2π-periodická funkce, která je po částech diferencovatelná na $[-\pi, \pi]$. Pak její Fourierova řada $F(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}$ konverguje v každém bodě $x \in \mathbb{R}$ a platí*

$$F(x) = \frac{f(x+) + f(x-)}{2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Speciálně platí, že pokud f je spojitá v x, pak $F(x) = f(x)$.

Důkaz. Zvolme pevně $x \in \mathbb{R}$. Částečné součty Fourierovy řady v bodě x lze vyjádřit pomocí Dirichletova jádra z lemmatu 1.2.3:

$$\begin{aligned} s_k(x) &= \sum_{n=-k}^{k} \hat{f}(n)\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx} = \sum_{n=-k}^{k} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\,\mathrm{d}t \right) \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(f(t) \sum_{n=-k}^{k} \mathrm{e}^{\mathrm{i}n(x-t)} \right) \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_k(x-t)\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Provedeme substituci $u = x - t$ a využijeme toho, že f i D_k jsou 2π-periodické funkce:

$$s_k(x) = -\frac{1}{2\pi} \int_{x+\pi}^{x-\pi} f(x-u) D_k(u)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2\pi} \int_{x-\pi}^{x+\pi} f(x-u) D_k(u)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-u) D_k(u)\,\mathrm{d}u.$$

Součet Fourierovy řady je limitou jejích částečných součtů:

$$F(x) = \lim_{k\to\infty} s_k(x) = \frac{1}{2} \left(\lim_{k\to\infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} f(x-u) D_k(u)\,\mathrm{d}u + \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(x-u) D_k(u)\,\mathrm{d}u \right) \tag{1.2.2}$$

K dokončení důkazu stačí ukázat, že limity v závorce existují a rovnají se $f(x+)$, resp. $f(x-)$. Začneme druhou limitou; podle druhé části lemmatu 1.2.3 platí

$$1 = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} D_k(u)\,\mathrm{d}u,$$

tudíž

$$\begin{aligned} f(x-) - \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(x-u) D_k(u)\,\mathrm{d}u &= \lim_{k\to\infty} \frac{f(x-)}{\pi} \int_{0}^{\pi} D_k(u)\,\mathrm{d}u - \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(x-u) D_k(u)\,\mathrm{d}u = \\ = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} (f(x-) - f(x-u)) D_k(u)\,\mathrm{d}u &= \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} \frac{f(x-) - f(x-u)}{u} \frac{u}{\sin\frac{u}{2}} \sin\left(\left(k + \frac{1}{2}\right) u \right) \mathrm{d}u, \end{aligned}$$

kde poslední rovnost plyne z první části lemmatu 1.2.3. Funkce

$$g(u) = \frac{f(x-) - f(x-u)}{u} \frac{u}{\sin \frac{u}{2}}, \quad u \in (0, \pi],$$

má konečnou limitu pro $u \to 0+$; existence limity prvního zlomku vyplývá ze skutečnosti, že f je po částech diferencovatelná, zatímco druhý zlomek má limitu díky známému vztahu $\lim_{z \to 0} \frac{\sin z}{z} = 1$. Pokud funkci g dodefinujeme v nule její limitou zprava, získáme funkci definovanou na $[0, \pi]$, která je po částech spojitá a omezená. Nyní se vrátíme k předchozímu výpočtu, zavedeme substituci $\omega = k + \frac{1}{2}$ a použijeme Riemannovo-Lebesgueovo lemma. Dostaneme

$$\begin{aligned} f(x-) - \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(x-u) D_k(u) \, \mathrm{d}u &= \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\pi} \int_0^\pi g(u) \sin\left(\left(k + \frac{1}{2}\right) u\right) \mathrm{d}u = \\ &= \lim_{\omega\to\infty} \frac{1}{\pi} \int_0^\pi g(u) \sin(\omega u) \, \mathrm{d}u = 0, \end{aligned}$$

což jsme chtěli dokázat.

Zbývá ukázat, že první limita v (1.2.2) existuje a má hodnotu $f(x+)$. Postup je podobný jako v předchozím případě, proto již budeme stručnější:

$$\begin{aligned} \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 f(x-u) D_k(u) \, \mathrm{d}u - f(x+) &= \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 (f(x-u) - f(x+)) D_k(u) \, \mathrm{d}u = \\ &= \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 \frac{f(x-u) - f(x+)}{u} \frac{u}{\sin \frac{u}{2}} \sin\left(\left(k + \frac{1}{2}\right) u\right) \mathrm{d}u = \\ &= \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{f(x+v) - f(x+)}{v} \frac{v}{\sin \frac{v}{2}} \sin\left(\left(k + \frac{1}{2}\right) v\right) \mathrm{d}v = 0, \end{aligned}$$

kde předposlední rovnost odpovídá substituci $v = -u$ a poslední krok plyne z Riemannova-Lebesgueova lemmatu stejným způsobem, jako v předchozí části důkazu. □

Již jsme zmínili, že k výpočtu Fourierových koeficientů a sestavení Fourierovy řady nepotřebujeme 2π-periodickou funkci $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$; stačí mít libovolnou integrovatelnou funkci $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$. Naproti tomu Fourierova řada je vždy definována na $\mathbb{R}$ a je 2π-periodická. Co se stane v případě, že funkce f není restrikcí 2π-periodické funkce, tj. $f(-\pi) \neq f(\pi)$? Odpověď dává následující důsledek.

Důsledek 1.2.5. *Nechť $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ je po částech diferencovatelná a $F(x) = \sum_{n=-\infty}^\infty \hat{f}(n) \mathrm{e}^{inx}$ je její Fourierova řada. Pak platí:*

(i) Pokud $x \in (-\pi, \pi)$, pak $F(x) = \frac{f(x+)+f(x-)}{2}$.

(ii) Pokud $x = \pm\pi$, pak $F(x) = \frac{f(-\pi+)+f(\pi-)}{2}$.

Důkaz. Nechť $\tilde{f}$ je 2π-periodické rozšíření funkce f z $[-\pi, \pi)$ na $\mathbb{R}$. Pak $\tilde{f}$ je po částech diferencovatelná na $[-\pi, \pi]$ a má stejnou Fourierovu řadu jako f. Podle věty 1.2.4 tedy platí

$$F(x) = \frac{\tilde{f}(x+) + \tilde{f}(x-)}{2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Na intervalu $(-\pi, \pi)$ platí $\tilde{f} = f$, a proto

$$F(x) = \frac{f(x+) + f(x-)}{2}, \quad x \in (-\pi, \pi).$$

Pro $x = \pm\pi$ využijeme 2π-periodicitu $\tilde{f}$:

$$\begin{aligned} F(\pi) &= \frac{\tilde{f}(\pi+) + \tilde{f}(\pi-)}{2} = \frac{\tilde{f}(-\pi+) + \tilde{f}(\pi-)}{2} = \frac{f(-\pi+) + f(\pi-)}{2}, \\ F(-\pi) &= \frac{\tilde{f}(-\pi+) + \tilde{f}(-\pi-)}{2} = \frac{\tilde{f}(-\pi+) + \tilde{f}(\pi-)}{2} = \frac{f(-\pi+) + f(\pi-)}{2}. \end{aligned}$$

□

Poznámka 1.2.6. Analogie věty 1.2.4 a důsledku 1.2.5 platí i pro reálné Fourierovy řady zavedené v poznámce 1.1.9, neboť jde pouze o jiný tvar komplexních Fourierových řad.

Předpoklady věty 1.2.4 se mohou zdát příliš silné: V motivační části 1.1 jsme uvažovali spojité funkce, resp. funkce z $L^1([-\pi,\pi])$, zatímco věta 1.2.4 požaduje, aby f byla po částech diferencovatelná. Ukazuje se však, že samotná spojitost nezaručuje konvergenci Fourierovy řady. Bez důkazu zmíníme následující výsledky:

- Existuje funkce $f \in L^1([-\pi,\pi])$, jejíž Fourierova řada diverguje ve všech bodech.
- Existuje spojitá funkce $f : [-\pi,\pi] \to \mathbb{C}$ taková, že množina bodů, kde Fourierova řada diverguje, je hustá v $\mathbb{R}$.[5]

Z hlediska teorie míry ovšem platí, že množina bodů, kde Fourierova řada spojité funkce diverguje, nemůže být příliš velká: Pokud $f : [-\pi,\pi] \to \mathbb{C}$ je spojitá, pak její Fourierova řada konverguje k funkci f skoro všude na $[-\pi,\pi]$. Tento hluboký výsledek dokázal[6] roku 1966 švédský matematik Lennart Carleson, který v roce 2006 získal Abelovu cenu.

1.3 Příklady a cvičení

Příklad 1.3.1. Najdeme reálnou Fourierovu řadu funkce

$$f(x) = |x|, \quad x \in [-\pi,\pi],$$

a vyšetříme její konvergenci.

Počítejme reálné Fourierovy koeficienty podle vztahů (1.1.9), (1.1.10). Využijeme přitom skutečnosti, že f je sudá.

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x| \,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} |x| \,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x \,\mathrm{d}x = \pi,\\
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x|\cos(nx) \,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos(nx) \,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\left(\left[\frac{x\sin(nx)}{n}\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{\sin(nx)}{n} \,\mathrm{d}x\right) =\\
&= \frac{2}{\pi}\left[\frac{\cos(nx)}{n^2}\right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi n^2}((-1)^n - 1), \quad n \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

Koeficient a_0 jsme museli počítat zvlášť, neboť při výpočtu a_n metodou per partes jsme dělili číslem n. Výpočet b_n je snadný, neboť integrujeme lichou funkci:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x|\sin(nx) \,\mathrm{d}x = 0.$$

Reálná Fourierova řada funkce f má tvar

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi n^2}((-1)^n - 1)\cos(nx).$$

Protože f je po částech diferencovatelná a spojitá na $[-\pi,\pi]$, podle důsledku 1.2.5 (viz též poznámku 1.2.6) platí $F(x) = f(x)$ pro všechna $x \in (-\pi,\pi)$. Protože $f(-\pi) = f(\pi)$, platí $F(x) = f(x)$ i pro $x = \pm\pi$, tj. $F = f$ na $[-\pi,\pi]$. Fourierova řada F je definována na celé reálné ose a je 2π-periodická, tudíž jde o 2π-periodické rozšíření f shodující se s pilovitou funkcí z obr. 1.1.

[5] Toto tvrzení znamená, že libovolně blízko k libovolnému bodu $x \in \mathbb{R}$ existuje bod, ve kterém Fourierova řada diverguje.

[6] Carleson ve skutečnosti dokázal silnější výsledek: Zmíněné tvrzení platí pro každou $f \in L^2([-\pi,\pi])$. Americký matematik Richard Allen Hunt v roce 1968 zobecnil Carlesonův výsledek na všechny funkce $f \in L^p([-\pi,\pi])$, kde $p > 1$.

Všimněme si, že bychom Fourierovu řadu mohli napsat v trochu jiném tvaru. Platí totiž

$$a_n = \frac{2}{\pi n^2}((-1)^n - 1) = \begin{cases} 0 & \text{pro } n \text{ sudé,} \\ \frac{-4}{\pi n^2} & \text{pro } n \text{ liché.} \end{cases}$$

Každé liché $n \in \mathbb{N}$ má tvar $2k+1$ pro $k \in \mathbb{N}_0$, tudíž

$$F(x) = \frac{\pi}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-4}{\pi(2k+1)^2} \cos((2k+1)x).$$

Ukažme si ještě, že dosazením vhodné hodnoty za x získáme součet zajímavé číselné řady. Pro $x = 0$ platí $F(0) = f(0) = 0$, proto

$$0 = \frac{\pi}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-4}{\pi(2k+1)^2}$$

a po úpravě

$$\frac{\pi^2}{8} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots .$$

Poznámka 1.3.2. Zobecněním úvah ze začátku předchozího příkladu dostáváme následující pozorování: Pokud je f reálná a sudá, pak platí

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(nx) \, \mathrm{d}x, \quad n \in \mathbb{N}_0, \\ b_n &= 0, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Pokud je f reálná a lichá, pak platí

$$\begin{aligned} a_n &= 0, \quad n \in \mathbb{N}_0, \\ b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx) \, \mathrm{d}x, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Příklad 1.3.3. Najdeme reálnou Fourierovu řadu funkce

$$f(x) = x, \quad x \in [-\pi, \pi],$$

a vyšetříme její konvergenci.

Jelikož f je lichá, platí

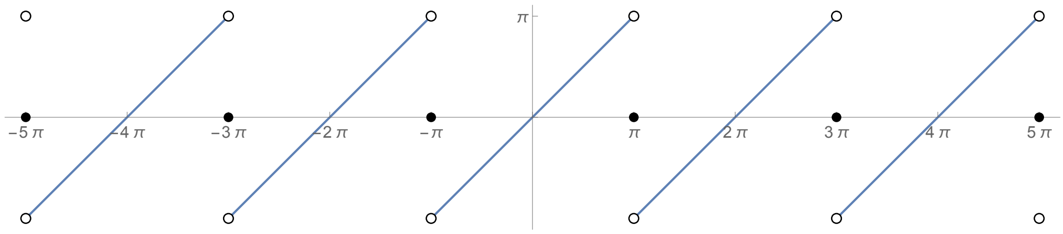
$$\begin{aligned} a_n &= 0, \quad n \in \mathbb{N}_0, \\ b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin(nx) \, \mathrm{d}x = \frac{2}{\pi} \left(\left[\frac{-x \cos(nx)}{n} \right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \frac{\cos(nx)}{n} \, \mathrm{d}x \right) = \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\frac{-\pi(-1)^n}{n} + \left[\frac{\sin(nx)}{n^2} \right]_0^{\pi} \right) = \frac{2}{n}(-1)^{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Dostáváme tedy Fourierovu řadu

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n}(-1)^{n+1} \sin(nx).$$

Protože f je po částech diferencovatelná a spojitá na $[-\pi, \pi]$, podle důsledku 1.2.5 platí $F(x) = f(x)$ pro všechna $x \in (-\pi, \pi)$ a dále

$$F(\pm\pi) = \frac{f(-\pi) + f(\pi)}{2} = \frac{-\pi + \pi}{2} = 0.$$



Obrázek 1.4: Fourierova řada funkce $f(x) = x$, $x \in [-\pi, \pi]$

Chování Fourierovy řady na zbytku reálné osy je zřejmé z toho, že F je 2π-periodická. Její graf je na obr. 1.4.

I tentokrát lze vhodnou volbou x získat součet zajímavé číselné řady. Dosadíme $x = \frac{\pi}{2}$:

$$\frac{\pi}{2} = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n}(-1)^{n+1} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = 2\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots\right).$$

Po úpravě dostáváme součet tzv. Leibnizovy řady:

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \frac{\pi}{4}.$$

Cvičení 1.3.4. Najděte reálnou Fourierovu řadu funkce

$$f(x) = x^2, \quad x \in [-\pi, \pi],$$

a vyšetřete její konvergenci. Vhodnou volbou x získejte součty řad $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ a $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}/n^2$.

Cvičení 1.3.5. Najděte reálnou Fourierovu řadu funkce

$$f(x) = \operatorname{sgn} x, \quad x \in [-\pi, \pi],$$

a vyšetřete její konvergenci.

Příklad 1.3.6. Uvažujme opět funkci

$$f(x) = x, \quad x \in [-\pi, \pi].$$

Na rozdíl od příkladu 1.3.3 najdeme její komplexní Fourierovu řadu.

1. způsob řešení. Použijeme definici komplexních Fourierových koeficientů $c_n = \hat{f}(n)$:

$$c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \, \mathrm{d}x = 0,$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi} \left(\left[\frac{x\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}}{-\mathrm{i}n} \right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{\mathrm{i}n} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx} \, \mathrm{d}x \right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}n} \left(-\pi \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\pi} - \pi \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\pi} + \frac{1}{-\mathrm{i}n} \left[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx} \right]_{-\pi}^{\pi} \right) = \frac{-1}{\mathrm{i}n} \cos(n\pi) = \frac{\mathrm{i}}{n}(-1)^n, \quad n \neq 0.$$

Koeficient c_0 jsme museli počítat zvlášť, neboť při výpočtu c_n jsme dělili číslem n. Komplexní Fourierova řada má tedy tvar

$$F(x) = \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{\mathrm{i}}{n}(-1)^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{i}}{n}(-1)^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}.$$

Konvergenci již nemusíme vyšetřovat – jde jen o jiné vyjádření reálné Fourierovy řady z příkladu 1.3.3, viz též obr. 1.4.

2. způsob řešení. Využijeme toho, že již známe reálnou Fourierovu řadu

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n}(-1)^{n+1}\sin(nx).$$

Komplexní Fourierovy koeficienty tedy můžeme získat z reálných pomocí převodních vztahů z poznámky 1.1.9. Dostaneme

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{a_0}{2} = 0, \\ c_n &= \frac{a_n - \mathrm{i}b_n}{2} = \frac{-\mathrm{i}b_n}{2} = \frac{\mathrm{i}}{n}(-1)^n, \quad n \in \mathbb{N}, \\ c_{-n} &= \frac{a_n + \mathrm{i}b_n}{2} = \frac{\mathrm{i}b_n}{2} = \frac{\mathrm{i}}{n}(-1)^{n+1} = \frac{\mathrm{i}}{-n}(-1)^{-n}, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Tedy pro kladná i záporná $n \neq 0$ platí $c_n = \frac{\mathrm{i}}{n}(-1)^n$, což souhlasí s výsledkem získaným prvním způsobem.

Příklad 1.3.7. Najdeme komplexní Fourierovu řadu funkce $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ definované předpisem

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \in [-\pi, 0], \\ \mathrm{e}^x & \text{pro } x \in (0, \pi]. \end{cases}$$

Podle definice komplexních Fourierových koeficientů platí pro každé $n \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \mathrm{e}^x \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{(1-\mathrm{i}n)x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\mathrm{e}^{(1-\mathrm{i}n)x}}{1-\mathrm{i}n}\right]_0^{\pi} = \frac{1}{2\pi(1-\mathrm{i}n)}(\mathrm{e}^{(1-\mathrm{i}n)\pi} - 1) = \\ &= \frac{1}{2\pi}\frac{1+\mathrm{i}n}{1+n^2}(\mathrm{e}^{\pi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\pi} - 1) = \frac{1}{2\pi}\frac{1+\mathrm{i}n}{1+n^2}(\mathrm{e}^{\pi}(-1)^n - 1). \end{aligned}$$

Komplexní Fourierova řada tedy má tvar

$$F(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi}\frac{1+\mathrm{i}n}{1+n^2}(\mathrm{e}^{\pi}(-1)^n - 1)\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}.$$

Vyšetříme její konvergenci pomocí důsledku 1.2.5: Funkce f je po částech diferencovatelná. Na intervalu $(-\pi, \pi)$ je spojitá s výjimkou bodu 0, platí tedy $F(x) = f(x)$ pro $x \in (-\pi, 0) \cup (0, \pi)$,

$$F(0) = \frac{f(0+) + f(0-)}{2} = \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2}.$$

Pro hodnoty v krajních bodech dostáváme

$$F(\pm\pi) = \frac{f(-\pi+) + f(\pi-)}{2} = \frac{0 + \mathrm{e}^{\pi}}{2} = \frac{\mathrm{e}^{\pi}}{2}.$$

Cvičení 1.3.8. Najděte reálnou Fourierovu řadu funkce f z příkladu 1.3.7. Při výpočtu a_n, b_n lze postupovat dvěma způsoby – počítat je z definičních vztahů (1.1.9), (1.1.10), nebo využít c_n z předchozího příkladu a převodní vztahy z poznámky 1.1.9. Ověřte, že v obou případech dojdete ke stejnému výsledku.

1.4 Cesàrovská sčítatelnost řad a Fejérova věta

Je-li dána nekonečná řada reálných či komplexních čísel $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$, pak její součet je definován jako limita částečných součtů

$$s_n = a_0 + \cdots + a_n, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

za předpokladu, že tato limita existuje.

Například řada

$$1-1+1-1+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k$$

diverguje, protože $s_n = 1$ pro sudá n a $s_n = 0$ pro lichá n. Jelikož však částečné součty pravidelně oscilují kolem hodnoty $1/2$, mohlo by se zdát „spravedlivé“ prohlásit tuto hodnotu za součet řady. Tuto myšlenku vyjadřuje následující definice.

Definice 1.4.1. Řekneme, že řada $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ je *cesàrovsky sčítatelná* k součtu σ, jestliže průměry jejích částečných součtů konvergují k σ, tj. platí

$$\lim_{n\to\infty}\frac{s_0+\cdots+s_n}{n+1}=\sigma.$$

Příklad 1.4.2. Pro výše uvedenou řadu $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k$ máme

$$s_0+\cdots+s_n=1+0+1+0+\cdots=\begin{cases}\frac{n+1}{2} & \text{pro } n \text{ liché},\\ \frac{n}{2}+1 & \text{pro } n \text{ sudé}.\end{cases}$$

Odsud je vidět, že

$$\lim_{n\to\infty}\frac{s_0+\cdots+s_n}{n+1}=\frac{1}{2},$$

tj. řada je cesàrovsky sčítatelná k součtu $1/2$.

Zmíněná metoda sčítání řad je pojmenována na počest italského matematika Ernesta Cesàra (1859–1906) a umožňuje přiřadit součet některým řadám, které jsou v obvyklém smyslu divergentní. Zároveň platí, že pokud $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = s$, pak také

$$\lim_{n\to\infty}\frac{s_0+\cdots+s_n}{n+1}=s,$$

neboli cesàrovský součet konvergentní řady se shoduje s jejím klasickým součtem.[7]

Cvičení 1.4.3. Ukažte, že pro $x \neq k\cdot 2\pi$, $k\in\mathbb{Z}$, je řada

$$\sin x+\sin(2x)+\sin(3x)+\cdots$$

cesàrovsky sčítatelná k součtu $\frac{1}{2}\operatorname{cotg}\frac{x}{2}$ (přestože je divergentní v klasickém smyslu).

Návod: Částečný součet $\sin x+\cdots+\sin(nx)$ je imaginární částí součtu $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+\cdots+\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}$, což je součet konečné geometrické posloupnosti.

Cesàrovu sčítací metodu zpopularizovalo její využití v teorii Fourierových řad, kterému se nyní budeme věnovat.

Víme, že pro 2π-periodickou funkci $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ není spojitost postačující podmínkou k tomu, aby Fourierova řada konvergovala ve všech bodech k f. Fejérova věta[8] tvrdí, že pokud místo limity částečných součtů Fourierovy řady

$$s_n(x)=\sum_{k=-n}^{n}\hat{f}(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} \tag{1.4.1}$$

budeme uvažovat limitu jejich průměrů

$$\sigma_n(x)=\frac{s_0(x)+\cdots+s_n(x)}{n+1}, \tag{1.4.2}$$

[7]Viz např. Theorem 1 na webu http://mathonline.wikidot.com/the-cesaro-summability-of-a-series.

[8]Lipót Fejér (1880–1959) byl maďarský matematik.

tj. pokud použijeme Cesàrovu sčítací metodu, pak platí

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n(x) = f(x)$$

pro každé $x \in \mathbb{R}$ a tato konvergence je dokonce stejnoměrná.

Z důkazu věty 1.2.4 víme, že částečné součty Fourierovy řady lze vyjádřit ve tvaru

$$s_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-u) D_n(u) \, \mathrm{d}u,$$

kde D_n je Dirichletovo jádro. Pro průměry částečných součtů pak platí

$$\sigma_n(x) = \frac{s_0(x) + \cdots + s_n(x)}{n+1} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-u) \frac{D_0(u) + \cdots + D_n(u)}{n+1} \, \mathrm{d}u. \tag{1.4.3}$$

Pro zjednodušení zápisu označíme

$$K_n(u) = \frac{D_0(u) + \cdots + D_n(u)}{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad u \in \mathbb{R},$$

a tuto funkci budeme nazývat *Fejérovo jádro*. Následující lemma shrnuje jeho vlastnosti, které budeme potřebovat.

Lemma 1.4.4. *Fejérovo jádro má následující vlastnosti:*

(i) Pro každé $n \in \mathbb{N}_0$ platí $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(x) \, \mathrm{d}x = 1$.

(ii) Je-li $n \in \mathbb{N}_0$ a $x \neq k \cdot 2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, pak

$$K_n(x) = \frac{1}{n+1} \left(\frac{\sin \frac{n+1}{2} x}{\sin \frac{x}{2}} \right)^2.$$

(iii) Pro každé $\delta \in (0, \pi)$ je posloupnost funkcí $\{K_n\}_{n=0}^{\infty}$ na množině $[-\pi, -\delta] \cup [\delta, \pi]$ stejnoměrně konvergentní k nulové funkci.

Důkaz. Tvrzení (i) plyne z definice Fejérova jádra a z toho, že podle lemmatu 1.2.3 pro každé $k \in \mathbb{N}_0$ platí $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_k(x) \, \mathrm{d}x = 1$. Ze stejného lemmatu víme, že pro $n \in \mathbb{N}_0$ a $x \neq j \cdot 2\pi$, $j \in \mathbb{Z}$, platí

$$D_n(x) = \frac{\sin(n + \frac{1}{2})x}{\sin \frac{x}{2}},$$

tudíž

$$K_n(x) = \frac{1}{n+1} \frac{\sin \frac{1}{2} x + \sin \frac{3}{2} x + \cdots + \sin(n + \frac{1}{2})x}{\sin \frac{x}{2}}.$$

K důkazu tvrzení (ii) tedy stačí ověřit, že

$$\sin \frac{1}{2} x + \sin \frac{3}{2} x + \cdots + \sin(n + \frac{1}{2})x = \frac{(\sin \frac{n+1}{2} x)^2}{\sin \frac{x}{2}}.$$

Tento úkol přenecháváme čtenáři – stačí si všimnout, že levá strana je imaginární složkou výrazu

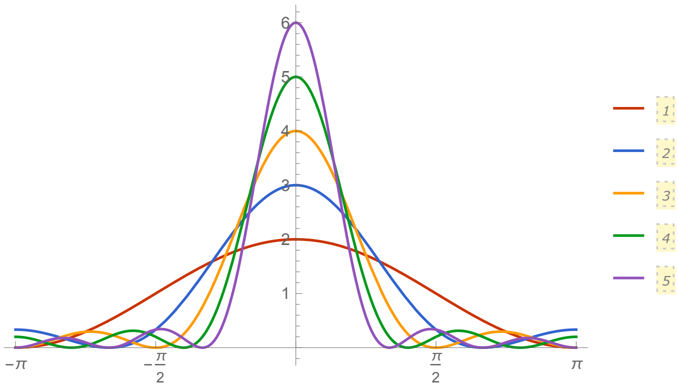
$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}x/2} + e^{3ix/2} + \cdots + \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+\frac{1}{2})x},$$

což je součet konečné geometrické posloupnosti.

Pro důkaz tvrzení (iii) si stačí uvědomit, že z tvrzení (ii) plyne odhad

$$0 \leq K_n(x) \leq \frac{1}{n+1} \frac{1}{\left(\sin \frac{\delta}{2}\right)^2}, \quad x \in [-\pi, -\delta] \cup [\delta, \pi].$$

□



Obrázek 1.5: Fejérovo jádro K_n pro $n = 1, \dots, 5$

První část lemmatu 1.4.4 říká, že průměrná hodnota Fejérova jádra na intervalu $[-\pi, \pi]$ je 1 (stejně jako průměrná hodnota Dirichletova jádra). Vzorec z části (ii) jsme využili v důkazu části (iii) a dále jej nebudeme potřebovat; postačí nám skutečnost, že Fejérovo jádro je nezáporné. Část (iii) říká, že velké hodnoty K_n se koncentrují pouze v okolí 0, viz obr. 1.5.

S těmito poznatky již není Fejérova věta překvapivá, neboť vidíme, že v integrálu $\int_{-\pi}^{\pi} f(x-u)K_n(u)\,\mathrm{d}u$, který vystupuje ve vztahu (1.4.3), hrají podstatnou roli pouze funkční hodnoty $f(x-u)$ pro u blízké k nule, tedy hodnoty blízké k $f(x)$.

Věta 1.4.5 (Fejérova věta)**.** *Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ je 2π-periodická funkce splňující $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|\,\mathrm{d}x < \infty$ a $\{\sigma_n\}_{n=0}^{\infty}$ je posloupnost funkcí definovaná vztahy (1.4.1)–(1.4.2). Je-li f spojitá v bodě $x \in \mathbb{R}$, pak $\lim_{n\to\infty} \sigma_n(x) = f(x)$. Pokud je f spojitá ve všech bodech, pak posloupnost $\{\sigma_n\}_{n=0}^{\infty}$ je stejnoměrně konvergentní k funkci f.*

Důkaz. Nechť $x \in \mathbb{R}$ je bod, ve kterém je f spojitá. Volme libovolné $\varepsilon > 0$. Pak existuje $\delta > 0$ takové, že

$$|f(x-u) - f(x)| \le \varepsilon, \quad u \in [-\delta, \delta].$$

Podle lemmatu 1.4.4 (iii) existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$|K_n(u)| \le \varepsilon, \quad n \ge n_0, \quad u \in [-\pi, -\delta] \cup [\delta, \pi].$$

S využitím vztahu (1.4.3) a lemmatu 1.4.4 (i) dostaneme

$$|\sigma_n(x) - f(x)| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-u)K_n(u)\,\mathrm{d}u - f(x) \right| =$$
$$= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-u)K_n(u)\,\mathrm{d}u - f(x)\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(u)\,\mathrm{d}u \right| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} (f(x-u) - f(x))K_n(u)\,\mathrm{d}u \right| \le$$
$$\le \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x-u) - f(x)| \cdot |K_n(u)|\,\mathrm{d}u =$$
$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} |f(x-u) - f(x)| \cdot |K_n(u)|\,\mathrm{d}u + \frac{1}{2\pi} \int_{[-\pi,-\delta]\cup[\delta,\pi]} |f(x-u) - f(x)| \cdot |K_n(u)|\,\mathrm{d}u.$$

V prvním sčítanci na pravé straně máme $|f(x-u) - f(x)| \le \varepsilon$, a proto

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} |f(x-u) - f(x)| \cdot |K_n(u)|\,\mathrm{d}u \le \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} |K_n(u)|\,\mathrm{d}u \le \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(u)\,\mathrm{d}u = \varepsilon.$$

Ve druhém sčítanci máme pro $n \geq n_0$ odhad $|K_n(u)| \leq \varepsilon$, a proto

$$\frac{1}{2\pi}\int_{[-\pi,-\delta]\cup[\delta,\pi]} |f(x-u)-f(x)|\cdot|K_n(u)|\,\mathrm{d}u \leq \frac{\varepsilon}{2\pi}\int_{[-\pi,-\delta]\cup[\delta,\pi]} (|f(x-u)|+|f(x)|)\,\mathrm{d}u \leq$$
$$\leq \frac{\varepsilon}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi}|f(x-u)|\,\mathrm{d}u + 2\pi|f(x)|\right) = \varepsilon\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(u)|\,\mathrm{d}u + |f(x)|\right)$$

(poslední rovnost plyne z 2π-periodicity funkce f). Dokázali jsme tedy, že pro $n \geq n_0$ platí

$$|\sigma_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon\left(1 + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(u)|\,\mathrm{d}u + |f(x)|\right).$$

Jelikož x je pevně zvoleno a ε může být libovolně malé, platí $\lim_{n\to\infty}\sigma_n(x) = f(x)$.

Je-li f spojitá na $\mathbb{R}$, pak díky periodicitě je omezená, tj. existuje $M > 0$ takové, že $|f(x)| \leq M$ pro každé $x \in \mathbb{R}$. Dostáváme tedy odhad

$$|\sigma_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon\left(1 + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(u)|\,\mathrm{d}u + M\right), \quad n \geq n_0,$$

jehož pravá strana nezávisí na x. Tím je dokázáno, že $\{\sigma_n\}_{n=0}^{\infty}$ konverguje stejnoměrně k f. □

Fejérova věta je zajímavá sama o sobě, ale navíc z ní plyne věta o aproximaci spojitých 2π-periodických funkcí trigonometrickými polynomy zmíněná v části 1.1, kterou jsme zatím nedokázali.

Věta 1.4.6. *Je-li $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ spojitá 2π-periodická funkce, pak pro každé $\varepsilon > 0$ existuje komplexní trigonometrický polynom t takový, že $|f(x) - t(x)| < \varepsilon$ pro každé $x \in \mathbb{R}$. Pokud je f reálná, pak t je reálný trigonometrický polynom.*

Důkaz. Podle Fejérovy věty posloupnost $\{\sigma_n\}_{n=0}^{\infty}$ konverguje stejnoměrně k f. Existuje tedy $n \in \mathbb{N}$ takové, že $|f(x) - \sigma_n(x)| < \varepsilon$ pro každé $x \in \mathbb{R}$. Nyní stačí volit $t = \sigma_n$ a uvědomit si, že se jedná o komplexní trigonometrický polynom. To plyne ze skutečnosti, že $s_0, \ldots, s_n$ jsou komplexní trigonometrické polynomy, a tedy i jejich průměr je komplexní trigonometrický polynom.

Je-li f reálná, pak jsou reálné i částečné součty $s_0, \ldots, s_n$ (viz poznámku 1.1.8), tudíž i jejich průměr $t = \sigma_n$. Jde tedy o komplexní trigonometrický polynom, který se shoduje se svou reálnou částí, což je reálný trigonometrický polynom. □

1.5 Fourierovy řady v prostorech se skalárním součinem

Fourierovy řady lze studovat v mnohem obecnějším kontextu prostorů se skalárním součinem. Některé myšlenky se dokonce stávají průzračnějšími díky geometrické interpretaci.

Definice prostoru se skalárním součinem nad obecným tělesem je známa z lineární algebry. Zde se omezíme na prostory se skalárním součinem nad tělesem $\mathbb{R}$, resp. $\mathbb{C}$. Připomeňme, že v prostoru se skalárním součinem lze definovat velikost (normu) libovolného vektoru x předpisem

$$\|x\| = \sqrt{x \cdot x}.$$

Pro každé dva vektory x, y platí Cauchyova-Schwarzova nerovnost

$$|x \cdot y| \leq \|x\|\|y\|$$

a trojúhelníková nerovnost

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

Jsou-li x, y kolmé, tj. $x \cdot y = 0$, pak platí Pythagorova věta

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2,$$

kterou lze indukcí zobecnit i na větší počet navzájem kolmých vektorů.

Nejjednodušším příkladem prostoru se skalárním součinem je $\mathbb{R}^n$, kde definujeme

$$x \cdot y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i,$$

resp. $\mathbb{C}^n$, kde definujeme

$$x \cdot y = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i},$$

přičemž v obou případech je norma vektoru x dána vzorcem

$$\|x\| = \sqrt{x \cdot x} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}.$$

Budou nás zajímat i prostory nekonečné dimenze; jednoduchým příkladem je prostor ℓ^2 tvořený všemi komplexními posloupnostmi $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$, pro které platí $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 < \infty$. Skalární součin dvou takových posloupností je definován vzorcem

$$\{x_i\}_{i=1}^{\infty} \cdot \{y_i\}_{i=1}^{\infty} = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \overline{y_i}$$

(lze dokázat, že řada na pravé straně vždy konverguje) a norma posloupnosti $x = \{x_i\}_{i=1}^{\infty} \in \ell^2$ se počítá podle vztahu

$$\|\{x_i\}_{i=1}^{\infty}\| = \sqrt{x \cdot x} = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2}.$$

Vidíme, že jde o analogie vzorců z eukleidovského prostoru.

V dalším textu budeme písmenem V značit libovolný vektorový prostor se skalárním součinem.

Definice 1.5.1. Množina $M \subset V$ se nazývá *ortogonální*, pokud pro každé dva různé vektory x, $y \in M$ platí $x \cdot y = 0$. Pokud navíc $\|x\| = 1$ pro každý vektor $x \in M$, pak hovoříme o *ortonormální* množině (resp. ortonormálním systému).

Definice 1.5.2. Ortonormální množina $M \subset V$ se nazývá *úplná*, pokud neexistuje nenulový vektor $x \in V$ splňující $x \cdot y = 0$ pro všechna $y \in M$.

K úplné ortonormální množině tedy nelze přidat další vektor tak, aby výsledná množina byla stále ortonormální. Jiný způsob, jak zformulovat definici, je následující: Pokud vektor $x \in V$ splňuje $x \cdot y = 0$ pro všechna $y \in M$, pak $x = 0$.

Přenecháváme čtenáři k rozmyšlení, že pokud V je prostor konečné dimenze, pak úplné ortonormální množiny jsou právě všechny ortonormální báze. Uveďme příklad úplné ortonormální množiny v prostoru nekonečné dimenze.

Příklad 1.5.3. Uvažujme prostor posloupností ℓ^2. Nechť e_i je posloupnost, jejíž i-tý člen je 1 a všechny ostatní členy jsou nulové. Pak $M = \{e_i : i \in \mathbb{N}\}$ je ortonormální množina, která je úplná. Skutečně, pokud $x \in \ell^2$ a pro každé $i \in \mathbb{N}$ platí $x \cdot e_i = 0$, pak z definice skalárního součinu v ℓ^2 vyplývá $x_i = 0$ pro každé $i \in \mathbb{N}$, čili $x = 0$. Za zmínku stojí fakt, že M není báze V, protože např. posloupnost $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots) \in \ell^2$ nelze vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů z M.

Připomeňme známou skutečnost z lineární algebry: Pokud V má konečnou dimenzi a $M = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ je jeho ortonormální báze, pak pro každý vektor $x \in V$ existují koeficienty $c_1, \dots, c_n$ takové, že

$$x = \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_i.$$

Násobíme-li obě strany rovnosti skalárně vektorem φ_j, kde $j \in \{1, \dots, n\}$, pak díky ortonormalitě dostaneme $x \cdot \varphi_j = c_j$. Tím pádem pro každý vektor $x \in V$ platí

$$x = \sum_{i=1}^{n} (x \cdot \varphi_i)\varphi_i.$$

Jaká je situace v prostorech nekonečné dimenze? Pokud $M = \{\varphi_i : i \in \mathbb{N}\}$ je úplná ortonormální množina v prostoru V, platí vztah

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} (x \cdot \varphi_i)\varphi_i \tag{1.5.1}$$

pro každé $x \in V$? V první řadě je třeba vyjasnit význam symbolu na pravé straně, neboť jde o součet nekonečně mnoha vektorů. Čtenáře asi nepřekvapí, že nejprve definujeme limitu posloupnosti vektorů, a poté zavedeme součet nekonečné řady jako limitu částečných součtů.

Definice 1.5.4. Pokud $x \in V$ a $x_i \in V$ pro každé $i \in \mathbb{N}$, pak zápis $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ znamená

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$$

a zápis $\sum_{i=1}^{\infty} x_i = x$ znamená $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} x_i = x$, čili

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \sum_{i=1}^{n} x_i - x \right\| = 0.$$

Pro posloupnosti vektorů zavedeme ještě jeden pojem známý z klasické analýzy.

Definice 1.5.5. Pokud $x_i \in V$ pro každé $i \in \mathbb{N}$, pak řekneme, že posloupnost $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ je *cauchyovská*, pokud pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $i_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $i, j \geq i_0$ platí $\|x_i - x_j\| < \varepsilon$.

Stejným způsobem jako v $\mathbb{R}$ se dokáže, že každá posloupnost vektorů, která má limitu, je cauchyovská. Obrácená implikace však obecně neplatí.

Definice 1.5.6. Řekneme, že prostor V je *úplný*, pokud každá cauchyovská posloupnost vektorů z V má limitu.

Z klasické analýzy je známo, že $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{C}^n$ jsou úplné prostory. Prostor ℓ^2 je rovněž úplný.

Ještě než zodpovíme otázku, zda v prostorech nekonečné dimenze platí vztah (1.5.1), ukažme si geometrický význam součtů $\sum_{i=1}^{n} (x \cdot \varphi_i)\varphi_i$, kde $M = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\} \subset V$ je libovolná (ne nutně úplná) ortonormální množina a V je prostor konečné či nekonečné dimenze. Opět jde o opakování z lineární algebry.

Věta 1.5.7 (o nejlepší aproximaci)**.** *Nechť $M = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\} \subset V$ je ortonormální množina a W je lineární obal M. Pak platí následující tvrzení:*

(i) Pro každý vektor $x \in V$ je $\sum_{i=1}^{n} (x \cdot \varphi_i)\varphi_i \in W$, $x - \sum_{i=1}^{n} (x \cdot \varphi_i)\varphi_i \in W^\perp$.

(ii) Pro každou dvojici vektorů $x \in V$, $w \in W$ platí

$$\left\| x - \sum_{i=1}^{n} (x \cdot \varphi_i)\varphi_i \right\| \leq \|x - w\|,$$

přičemž rovnost nastává jen pro $w = \sum_{i=1}^{n} (x \cdot \varphi_i)\varphi_i$.

(iii) Pro každý vektor $x \in V$ platí

$$\|x\|^2 \geq \sum_{i=1}^{n} |x \cdot \varphi_i|^2.$$

Důkaz. (i) Vztah $\sum_{i=1}^{n}(x \cdot \varphi_i)\varphi_i \in W$ je zřejmý z definice lineárního obalu. Pro každé $j \in \{1, \dots, n\}$ díky ortonormalitě M platí

$$\left(x - \sum_{i=1}^{n}(x \cdot \varphi_i)\varphi_i\right) \cdot \varphi_j = x \cdot \varphi_j - \sum_{i=1}^{n}(x \cdot \varphi_i)(\varphi_i \cdot \varphi_j) = x \cdot \varphi_j - x \cdot \varphi_j = 0,$$

a proto $x - \sum_{i=1}^{n}(x \cdot \varphi_i)\varphi_i \in W^\perp$.

(ii) Pro každou dvojici vektorů $x \in V$, $w \in W$ platí

$$x - w = \left(x - \sum_{i=1}^{n}(x \cdot \varphi_i)\varphi_i\right) + \left(\sum_{i=1}^{n}(x \cdot \varphi_i)\varphi_i - w\right).$$

Na pravé straně máme součet dvou kolmých vektorů, neboť první sčítanec leží ve $W^\perp$ a druhý ve W. Z Pythagorovy věty dostáváme

$$\|x - w\|^2 = \left\|x - \sum_{i=1}^{n}(x \cdot \varphi_i)\varphi_i\right\|^2 + \left\|\sum_{i=1}^{n}(x \cdot \varphi_i)\varphi_i - w\right\|^2 \geq \left\|x - \sum_{i=1}^{n}(x \cdot \varphi_i)\varphi_i\right\|^2,$$

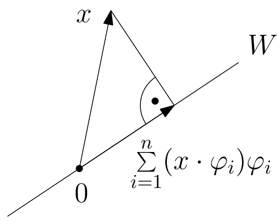
přičemž rovnost nastává, právě když $w = \sum_{i=1}^{n}(x \cdot \varphi_i)\varphi_i$.

(iii) Pro každý vektor $x \in V$ platí

$$x = \left(x - \sum_{i=1}^{n}(x \cdot \varphi_i)\varphi_i\right) + \sum_{i=1}^{n}(x \cdot \varphi_i)\varphi_i.$$

Na pravé straně máme opět součet dvou kolmých vektorů, neboť první sčítanec leží ve $W^\perp$ a druhý ve W. Použijeme-li dvakrát po sobě Pythagorovu větu, dostaneme

$$\|x\|^2 = \left\|x - \sum_{i=1}^{n}(x \cdot \varphi_i)\varphi_i\right\|^2 + \left\|\sum_{i=1}^{n}(x \cdot \varphi_i)\varphi_i\right\|^2 \geq \left\|\sum_{i=1}^{n}(x \cdot \varphi_i)\varphi_i\right\|^2 = \sum_{i=1}^{n}|x \cdot \varphi_i|^2. \qquad \square$$



Obrázek 1.6: Geometrický význam věty 1.5.7

Věta 1.5.7 má jednoduchou geometrickou interpretaci: Říká, že $\sum_{i=1}^{n}(x \cdot \varphi_i)\varphi_i$ je prvek podprostoru W, který minimalizuje vzdálenost od x, neboli kolmý průmět x do W, viz obr. 1.6. Navíc délka tohoto kolmého průmětu je menší nebo rovna délce x. Tento výsledek platí i v případě, kdy M má nekonečně mnoho prvků, a nazývá se *Besselova nerovnost*.

Důsledek 1.5.8 (Besselova nerovnost)**.** *Pokud $M = \{\varphi_i : i \in \mathbb{N}\}$ je ortonormální množina v prostoru V, pak pro každý vektor $x \in V$ platí*

$$\|x\|^2 \geq \sum_{i=1}^{\infty} |x \cdot \varphi_i|^2.$$

Důkaz. Stačí použít třetí část věty 1.5.7 a provést limitní přechod $n \to \infty$. $\square$

I když se může zdát, že dosavadní výklad nemá nic společného s Fourierovými řadami z částí 1.1 až 1.4, brzy uvidíme, že tyto řady představují speciální případ následující definice.

Definice 1.5.9. Nechť $M = \{\varphi_i : i \in \mathbb{N}\}$ je ortonormální množina v prostoru V. Pak pro každý vektor $x \in V$ se řada

$$\sum_{i=1}^{\infty} (x \cdot \varphi_i)\varphi_i$$

nazývá *Fourierovou řadou* x vzhledem k M a čísla $x \cdot \varphi_i$, $i \in \mathbb{N}$, se nazývají *Fourierovými koeficienty* vektoru x vzhledem k M.

Dříve položenou otázku tedy můžeme přeformulovat následujícím způsobem: Máme-li úplnou ortonormální množinu v prostoru nekonečné dimenze, je každý vektor součtem své Fourierovy řady? Odpověď dává následující věta.

Věta 1.5.10. *Nechť V je úplný prostor a $M = \{\varphi_i : i \in \mathbb{N}\} \subset V$ je ortonormální množina. Pak jsou následující podmínky ekvivalentní:*

(i) Ortonormální množina M je úplná.

(ii) Pro každý vektor $x \in V$ platí $x = \sum_{i=1}^{\infty} (x \cdot \varphi_i)\varphi_i$.

(iii) Pro každý vektor $x \in V$ platí $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |x \cdot \varphi_i|^2$.

Důkaz. Pro důkaz implikace (i)⇒(ii) potřebujeme ukázat, že částečné součty

$$s_k = \sum_{i=1}^{k} (x \cdot \varphi_i)\varphi_i, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{1.5.2}$$

mají limitu. Vzhledem k úplnosti V stačí ověřit, že posloupnost $\{s_k\}_{k=1}^{\infty}$ je cauchyovská. Pokud $k > l$, pak platí

$$s_k - s_l = \sum_{i=l+1}^{k} (x \cdot \varphi_i)\varphi_i,$$

a tedy podle Pythagorovy věty

$$\|s_k - s_l\|^2 = \sum_{i=l+1}^{k} |x \cdot \varphi_i|^2. \tag{1.5.3}$$

Z Besselovy nerovnosti (důsledek 1.5.8) plyne, že řada $\sum_{i=1}^{\infty} |x \cdot \varphi_i|^2$ má konečný součet. Dále z Bolzanovy-Cauchyovy podmínky pro konvergenci nekonečných řad dostáváme, že pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $k_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $k, l \geq k_0$ splňující $k > l$ platí

$$\sum_{i=l+1}^{k} |x \cdot \varphi_i|^2 < \varepsilon^2.$$

S ohledem na vztah (1.5.3) to znamená, že $\|s_k - s_l\| < \varepsilon$, tj. $\{s_k\}_{k=1}^{\infty}$ je cauchyovská. Tudíž existuje limita

$$\lim_{k \to \infty} s_k = y \in V$$

a zbývá dokázat, že $y = x$. Ukažme nejprve, že x a y mají stejné Fourierovy koeficienty. Vezměme libovolné $j \in \mathbb{N}$. Z definice s_k a ortonormality plyne, že pro všechna $k \geq j$ platí $s_k \cdot \varphi_j = x \cdot \varphi_j$, tudíž

$$y \cdot \varphi_j - x \cdot \varphi_j = y \cdot \varphi_j - s_k \cdot \varphi_j = (y - s_k) \cdot \varphi_j.$$

Z Cauchyovy-Schwarzovy nerovnosti získáme odhad

$$|y \cdot \varphi_j - x \cdot \varphi_j| \leq \|y - s_k\| \|\varphi_j\| = \|y - s_k\|.$$

Pravá strana pro $k \to \infty$ konverguje k nule, a proto $y \cdot \varphi_j = x \cdot \varphi_j$, což jsme chtěli dokázat. Z rovnosti $(y - x) \cdot \varphi_j = 0$ pro každé $j \in \mathbb{N}$ ovšem plyne $y - x = 0$, neboť M je úplná ortonormální množina.

K důkazu implikace (ii)⇒(iii) opět uvažujme částečné součty (1.5.2). Pro každé $k \in \mathbb{N}$ plyne z trojúhelníkové nerovnosti odhad

$$\big| \|x\| - \|s_k\| \big| \leq \|x - s_k\|.$$

Jelikož pravá strana podle předpokladu konverguje pro $k \to \infty$ k nule, platí totéž i o levé straně a dostáváme

$$\|x\| = \lim_{k\to\infty} \|s_k\|.$$

Výpočet dokončíme použitím Pythagorovy věty:

$$\|x\|^2 = \lim_{k\to\infty} \|s_k\|^2 = \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{k} |x \cdot \varphi_i|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |x \cdot \varphi_i|^2.$$

Zbývající implikace (iii)⇒(i) je triviální: Pokud vektor $x \in V$ splňuje $x \cdot \varphi_i = 0$ pro každé $i \in \mathbb{N}$, pak podle tvrzení (iii) platí $\|x\| = 0$, a tedy $x = 0$. □

Třetí část právě dokázané věty říká, že pro úplné ortonormální množiny přechází Besselova nerovnost v rovnost; nazývá se *Parsevalova rovnost.*[9]

1.6 Fourierovy řady v prostoru L^2

Ukážeme, že klasické Fourierovy řady studované v částech 1.1 až 1.4 představují speciální případ Fourierových řad v prostorech se skalárním součinem, kde za prostor V zvolíme prostor funkcí $L^2([-\pi, \pi])$.

Nejprve připomeňme, že pro každé $p \in [1, \infty)$ je norma funkce $f \in L^p([a, b])$ definována předpisem

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f|^p \right)^{1/p}.$$

Pro $p = 2$ navíc definujeme skalární součin funkcí $f, g \in L^2([a, b])$ předpisem

$$f \cdot g = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}\, \mathrm{d}x.$$

Všimněme si, že pro $f \in L^2([a, b])$ platí

$$\|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b |f|^2} = \sqrt{f \cdot f},$$

tj. definice normy $\|\cdot\|_2$ na $L^2([a, b])$ odpovídá normě získané ze skalárního součinu.

Z teorie Lebesgueova integrálu víme, že prostor $L^2([a, b])$ je úplný ve smyslu definice 1.5.6.

Zaměříme se na případ $[a, b] = [-\pi, \pi]$, tj. na prostor $V = L^2([-\pi, \pi])$. Tvrdíme, že množina funkcí

$$\tilde{M} = \{\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx} : n \in \mathbb{Z}\}$$

je ortogonální podmnožinou V. Skutečně, každé dva různé prvky této množiny jsou kolmé, neboť již v důkazu věty 1.1.6 jsme vypočítali, že pro $m, n \in \mathbb{Z}$ platí

$$\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}mx}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}\, \mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(m-n)x}\, \mathrm{d}x = \begin{cases} 0 & \text{pro } m \neq n, \\ 2\pi & \text{pro } m = n. \end{cases}$$

[9] Marc-Antoine Parseval (1755–1836) byl francouzský matematik.

Zároveň vidíme, že norma libovolného prvku $\tilde{M}$ je $\sqrt{2\pi}$, takže množina funkcí

$$M = \left\{ \frac{\mathrm{e}^{inx}}{\sqrt{2\pi}} : n \in \mathbb{Z} \right\}$$

je ortonormální podmnožinou V. Použijme označení z části 1.4 a pišme

$$M = \{\varphi_n : n \in \mathbb{Z}\},$$

kde φ_n značí funkci $x \mapsto \frac{\mathrm{e}^{inx}}{\sqrt{2\pi}}$. Skutečnost, že jako indexy používáme celá čísla místo přirozených, nehraje roli – celých čísel je spočetně mnoho a mohli bychom tedy prvky M očíslovat přirozenými čísly, avšak na úkor přehlednosti.

Jak vypadají Fourierovy koeficienty a Fourierova řada libovolné funkce $f \in V$ vzhledem k ortonormální množině M? Dosazením do definice 1.5.9 máme

$$f \cdot \varphi_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \frac{\mathrm{e}^{-inx}}{\sqrt{2\pi}} \, \mathrm{d}x = \sqrt{2\pi} \hat{f}(n), \quad n \in \mathbb{Z},$$

tudíž

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} (f \cdot \varphi_n)\varphi_n = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \sqrt{2\pi} \hat{f}(n) \frac{\mathrm{e}^{inx}}{\sqrt{2\pi}} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)\mathrm{e}^{inx}.$$

Vidíme, že Fourierova řada z definice 1.5.9 se v tomto případě shoduje s klasickou Fourierovou řadou zavedenou v definici 1.1.7 a Fourierovy koeficienty se liší jen o multiplikativní konstantu.

Jaké poznatky o klasických Fourierových řadách plynou z výsledků získaných v části 1.5? Jako speciální případ Besselovy nerovnosti z důsledku 1.5.8 dostáváme, že pro každou funkci $f \in L^2([-\pi, \pi])$ platí

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \, \mathrm{d}x = \|f\|_2^2 \geq \sum_{n\in\mathbb{Z}} |f \cdot \varphi_n|^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} 2\pi |\hat{f}(n)|^2,$$

neboli po úpravě

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \, \mathrm{d}x \geq \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|^2.$$

Pokud bychom dokázali, že M je úplná ortonormální množina, pak podle věty 1.5.10 přejde Besselova nerovnost v Parsevalovu rovnost

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \, \mathrm{d}x = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|^2.$$

Místo úplnosti M stačí podle věty 1.5.10 dokázat, že pro každou funkci $f \in L^2([-\pi, \pi])$ platí

$$f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (f \cdot \varphi_n)\varphi_n.$$

Tuto rovnost je potřeba chápat podle definice 1.5.4; neznačí tedy bodovou konvergenci Fourierovy řady k funkci f, ale jde o platnost vztahu

$$\lim_{k\to\infty} \left\| f - \sum_{n=-k}^{k} (f \cdot \varphi_n)\varphi_n \right\|_2 = 0. \tag{1.6.1}$$

K důkazu potřebujeme některé poznatky z teorie Lebesgueova integrálu. Z teorie míry víme, že měřitelné množiny lze zvnějšku dobře aproximovat otevřenými množinami. Následující lemma říká, že k aproximaci zevnitř lze použít uzavřené množiny.

Lemma 1.6.1. *Pokud $A \subset \mathbb{R}^n$ je měřitelná množina a $\varepsilon > 0$, pak existuje uzavřená množina $F \subset A$ splňující $\lambda(A \setminus F) < \varepsilon$.*

Důkaz. Množina $\mathbb{R}^n \setminus A$ je měřitelná, existuje tedy otevřená množina $G \subset \mathbb{R}^n$ obsahující $\mathbb{R}^n \setminus A$ taková, že $\lambda(G \setminus (\mathbb{R}^n \setminus A)) < \varepsilon$. Množina $F = \mathbb{R}^n \setminus G$ je uzavřená, je obsažena v A a platí $A \setminus F = A \cap G = G \setminus (\mathbb{R}^n \setminus A)$, tedy $\lambda(A \setminus F) < \varepsilon$. □

Následující klíčová věta říká, že funkce z L^p lze aproximovat spojitými funkcemi.

Věta 1.6.2. *Pro každou funkci $f \in L^p([a,b])$ a pro každé $\varepsilon > 0$ existuje spojitá funkce $g : [a,b] \to \mathbb{C}$ taková, že $\|f - g\|_p < \varepsilon$. Funkci g lze navíc volit tak, aby platilo $g(a) = g(b)$.*

Důkaz. Platnost věty stačí dokázat pro reálnou funkci f; komplexní funkci lze rozložit na reálnou a imaginární část a na každou z nich aplikovat dokázané tvrzení. Existenci spojité funkce g splňující $\|f-g\|_p < \varepsilon$ dokážeme v pěti krocích. Postupně budeme uvažovat případy, kdy f je charakteristická funkce uzavřené množiny, charakteristická funkce měřitelné množiny, jednoduchá měřitelná nezáporná funkce, nezáporná funkce z $L^p([a,b])$ a nakonec obecná funkce z $L^p([a,b])$. V závěru pak ukážeme, jak lze zaručit platnost vztahu $g(a) = g(b)$.

1) Nechť $F \subset [a,b]$ je neprázná uzavřená množina a $f = \chi_F$ je její charakteristická funkce. Pro každé $x \in \mathbb{R}$ definujme vzdálenost bodu x od množiny F předpisem $d(x) = \min_{y \in F} |x - y|$ (minimum existuje, neboť jde o extrém spojité funkce na kompaktní množině). S využitím trojúhelníkové nerovnosti není těžké ukázat, že $|d(x_1) - d(x_2)| \leq |x_1 - x_2|$, a tudíž d je spojitá funkce.

Uvažujme posloupnost funkcí $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definovaných předpisem

$$g_n(x) = \frac{1}{1 + nd(x)}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Tyto funkce jsou spojité a pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $\lim_{n\to\infty} g_n(x) = \chi_F(x) = f(x)$; pokud totiž $x \in F$, pak $d(x) = 0$ a $g_n(x) = 1$, zatímco pro $x \notin F$ je $d(x) > 0$ a jmenovatel zlomku v definici $g_n(x)$ pro $n \to \infty$ roste nade všechny meze.

Funkce f i g_n jsou omezené, tedy $|f - g_n|^p$ je omezená a podle Lebesgueovy věty platí

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b |f - g_n|^p = \int_a^b \lim_{n\to\infty} |f - g_n|^p = 0.$$

Z definice normy v $L^p([a,b])$ plyne $\lim_{n\to\infty} \|f - g_n\|_p = 0$. K danému $\varepsilon > 0$ tedy stačí najít n takové, že $\|f - g_n\|_p < \varepsilon$, a položit $g = g_n$.

2) Nechť $A \subset [a,b]$ je měřitelná množina a $f = \chi_A$ je její charakteristická funkce. Z lemmatu 1.6.1 víme, že existuje uzavřená množina $B \subset A$ taková, $\lambda(A \setminus B) < (\varepsilon/2)^p$. Pro její charakteristickou funkci pak platí

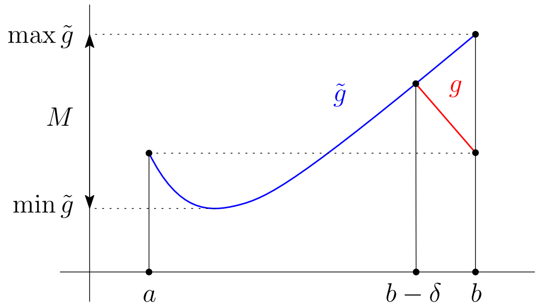
$$\|f - \chi_B\|_p = \|\chi_{A\setminus B}\|_p = \left(\int_a^b |\chi_{A\setminus B}|^p\right)^{1/p} = \left(\int_a^b \chi_{A\setminus B}\right)^{1/p} = \lambda(A \setminus B)^{1/p} < \varepsilon/2.$$

Podle předchozí části důkazu existuje spojitá funkce $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ taková, že $\|\chi_B - g\|_p < \varepsilon/2$. V kombinaci s předchozím odhadem tedy platí $\|f - g\|_p \leq \|f - \chi_B\|_p + \|\chi_B - g\|_p < \varepsilon$.

3) Nechť f je jednoduchá měřitelná nezáporná funkce, která je nulová vně $[a,b]$. Pak $f = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{A_i}$, kde $A_i \subset [a,b]$ jsou měřitelné množiny a a_i jsou nezáporná čísla. Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že žádné a_i není nulové (jinak vynecháme příslušný sčítanec). Pro každé $i \in \{1, \ldots, n\}$ existuje podle předchozí části důkazu spojitá funkce $g_i : [a,b] \to \mathbb{R}$ taková, že $\|\chi_{A_i} - g_i\|_p < \frac{\varepsilon}{na_i}$. Funkce $g = \sum_{i=1}^n a_i g_i$ je spojitá a platí

$$\|f - g\|_p = \left\|\sum_{i=1}^n a_i(\chi_{A_i} - g_i)\right\|_p \leq \sum_{i=1}^n a_i \|\chi_{A_i} - g_i\|_p \leq \sum_{i=1}^n a_i \frac{\varepsilon}{na_i} = \varepsilon.$$

4) Nechť $f \in L^p([a,b])$ je nezáporná. Pak existuje neklesající posloupnost nezáporných jednoduchých měřitelných funkcí $\{f_n\}_{n=1}^\infty$, které jsou nulové vně $[a,b]$ a konvergují k f. Platí $0 \leq f_n \leq f$, tudíž $|f - f_n| \leq f$



Obrázek 1.7: Konstrukce funkce g splňující $g(a) = g(b)$

a $|f - f_n|^p \le f^p$. Z Lebesgueovy věty dostáváme

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b |f - f_n|^p = \int_a^b \lim_{n\to\infty} |f - f_n|^p = 0.$$

Z definice normy v $L^p([a, b])$ plyne $\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_p = 0$. Najdeme $n \in \mathbb{N}$ takové, že $\|f - f_n\|_p < \varepsilon/2$. Podle předchozí části důkazu existuje spojitá funkce $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ taková, že $\|f_n - g\|_p < \varepsilon/2$. Celkem tedy platí $\|f - g\|_p \le \|f - f_n\|_p + \|f_n - g\|_p < \varepsilon$.

5) Nechť $f \in L^p([a, b])$. Pak $f = f^+ - f^-$, kde $0 \le f^+ \le |f|$, $0 \le f^- \le |f|$, tj. f^+, f^- jsou nezáporné funkce z $L^p([a, b])$. Vezmeme spojité funkce $g_1, g_2 : [a, b] \to \mathbb{R}$ takové, že $\|f^+ - g_1\|_p < \varepsilon/2$, $\|f^- - g_2\|_p < \varepsilon/2$. Funkce $g = g_1 - g_2$ je spojitá a splňuje $\|f - g\|_p \le \|f^+ - g_1\|_p + \|f^- - g_2\|_p < \varepsilon$.

Zbývá zdůvodnit, proč lze funkci g volit tak, aby platilo $g(a) = g(b)$. Podle páté části důkazu existuje spojitá a tudíž omezená funkce $\tilde{g} : [a, b] \to \mathbb{R}$ taková, že $\|f - \tilde{g}\|_p < \varepsilon/2$. Položme $M = \max \tilde{g} - \min \tilde{g}$.

Hledanou funkci g zkonstruujeme tak, že zvolíme dostatečně malé $\delta > 0$, položíme $g(x) = \tilde{g}(x)$ pro $x \in [a, b - \delta]$ a na intervalu $(b - \delta, b]$ definujeme g tak, aby se jednalo o lineární funkci, která v bodě b nabývá hodnoty $g(a)$; viz obr. 1.7. Pak platí $|g(x) - \tilde{g}(x)| \le M$ pro všechna $x \in [b - \delta, b]$, a tudíž

$$\|g - \tilde{g}\|_p = \left(\int_{b-\delta}^b |g - \tilde{g}|^p \right)^{1/p} \le (\delta M^p)^{1/p}.$$

Pokud jsme zvolili $\delta > 0$ tak, že $(\delta M^p)^{1/p} < \varepsilon/2$, pak platí $\|f - g\|_p \le \|f - \tilde{g}\|_p + \|\tilde{g} - g\|_p < \varepsilon$. □

Nyní můžeme přikročit k důkazu vztahu (1.6.1).

Věta 1.6.3. *Nechť $f \in L^2([-\pi, \pi])$. Pak platí $\lim_{k\to\infty} \|f - s_k\|_2 = 0$, kde $s_k = \sum_{n=-k}^k (f \cdot \varphi_n)\varphi_n$.*

Důkaz. Volme libovolné $\varepsilon > 0$. Podle věty 1.6.2 existuje spojitá funkce $g : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ splňující $\|f - g\|_2 < \varepsilon$ a $g(-\pi) = g(\pi)$. Tuto funkci lze rozšířit na spojitou 2π-periodickou funkci g definovanou na $\mathbb{R}$. Podle věty 1.1.4 (viz též větu 1.4.6) existuje komplexní trigonometrický polynom

$$t(x) = \sum_{n=-m}^m c_n \mathrm{e}^{inx}$$

takový, že $|g(x) - t(x)| < \varepsilon$ pro každé $x \in \mathbb{R}$. Pro normu rozdílu $g - t$ v prostoru $L^2([-\pi, \pi])$ tedy platí

$$\|g - t\|_2 = \left(\int_{-\pi}^{\pi} |g(x) - t(x)|^2 \,\mathrm{d}x \right)^{1/2} \le \left(\int_{-\pi}^{\pi} \varepsilon^2 \,\mathrm{d}x \right)^{1/2} = \left(2\pi\varepsilon^2\right)^{1/2} = \sqrt{2\pi}\varepsilon.$$

Trigonometrický polynom t lze rovněž vyjádřit ve tvaru

$$t = \sum_{n=-m}^m d_n \varphi_n,$$

kde $d_n = \sqrt{2\pi} c_n$. Pokud $k \geq m$, pak t leží v lineárním obalu množiny $\{\varphi_{-k}, \ldots, \varphi_k\}$ a podle věty 1.5.7 o nejlepší aproximaci platí

$$\|f - s_k\|_2 = \left\| f - \sum_{n=-k}^{k} (f \cdot \varphi_n)\varphi_n \right\|_2 \leq \|f - t\|_2 \leq \|f - g\|_2 + \|g - t\|_2 < \varepsilon + \sqrt{2\pi}\varepsilon = \varepsilon(1 + \sqrt{2\pi}).$$

Tím je dokázáno, že $\lim_{k\to\infty} \|f - s_k\|_2 = 0$. □

Z věty 1.5.10 okamžitě dostáváme následující důsledek.

Důsledek 1.6.4. *Množina $M = \left\{ \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}} : n \in \mathbb{Z} \right\}$ je úplná ortonormální podmnožina prostoru $L^2([-\pi, \pi])$ a pro každou funkci $f \in L^2([-\pi, \pi])$ platí Parsevalova rovnost*

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \, dx = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|^2. \tag{1.6.2}$$

Poznámka 1.6.5. Máme-li reálnou funkci $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$, pak můžeme Parsevalovu rovnost vyjádřit i pomocí reálných Fourierových koeficientů a_n, b_n. Pokud označíme $c_n = \hat{f}(n)$, pak víme (viz poznámku 1.1.9), že platí

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, \quad c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}, \quad c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Odtud plyne

$$|c_0|^2 = \frac{a_0^2}{4}, \quad |c_n|^2 = \frac{1}{4}(a_n^2 + b_n^2), \quad |c_{-n}|^2 = \frac{1}{4}(a_n^2 + b_n^2), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Dosazením do vztahu (1.6.2) získáme

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 \, dx = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

a po úpravě

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 \, dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2), \tag{1.6.3}$$

což je varianta Parsevalovy rovnosti pro reálné funkce $f \in L^2([-\pi, \pi])$.

1.7 Příklady a cvičení

Máme-li funkci $f \in L^2([-\pi, \pi])$, napíšeme pro ni Parsevalovu rovnost a vypočteme integrál, který v ní vystupuje, získáme součet jisté číselné řady sestavené z druhých mocnin Fourierových koeficientů. Tímto způsobem lze sečíst některé zajímavé nekonečné řady.

Příklad 1.7.1. Z příkladu 1.3.3 víme, že funkce $f(x) = x$, $x \in [-\pi, \pi]$, má reálné Fourierovy koeficienty

$$a_n = 0, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad b_n = \frac{2}{n}(-1)^{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Dosazením do reálné Parsevalovy rovnosti (1.6.3) obdržíme

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2}$$

a po úpravě získáme součet řady[10]

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} x^2 \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Ke stejnému výsledku bychom samozřejmě dospěli i dosazením komplexních Fourierových koeficientů z příkladu 1.3.6 do komplexní Parsevalovy rovnosti (1.6.2).

Příklad 1.7.2. Z příkladu 1.3.1 víme, že funkce $f(x) = |x|$, $x \in [-\pi, \pi]$, má reálné Fourierovy koeficienty

$$a_0 = \pi, \quad a_{2k} = 0 \text{ pro } k \in \mathbb{N}, \quad a_{2k+1} = \frac{-4}{\pi(2k+1)^2} \text{ pro } k \in \mathbb{N}_0, \quad b_n = 0 \text{ pro } n \in \mathbb{N}.$$

Dosazením do reálné Parsevalovy rovnosti (1.6.3) obdržíme

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \,\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{16}{\pi^2 (2k+1)^4}$$

a po úpravě získáme součet čtvrtých mocnin převrácených hodnot lichých čísel:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4} = \frac{\pi^2}{16} \left(\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \,\mathrm{d}x - \frac{\pi^2}{2} \right) = \frac{\pi}{8} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^{\pi} - \frac{\pi^4}{32} = \frac{\pi^4}{24} - \frac{\pi^4}{32} = \frac{\pi^4}{96}.$$

Cvičení 1.7.3. Zjistěte, jakou řadu lze sečíst pomocí Parsevalovy rovnosti pro funkci

$$f(x) = x^2, \quad x \in [-\pi, \pi]$$

(využijte výsledek cvičení 1.3.4).

Cvičení 1.7.4. Zjistěte, jakou řadu lze sečíst pomocí Parsevalovy rovnosti pro funkci

$$f(x) = \operatorname{sgn} x, \quad x \in [-\pi, \pi]$$

(využijte výsledek cvičení 1.3.5).

1.8 Fourierovy řady na obecném intervalu

Doposud jsme studovali 2π-periodické funkce, resp. jejich restrikce na interval $[-\pi, \pi]$. Rozvíjeli jsme je do Fourierových řad sestavených z nejjednodušších periodických funkcí: konstantní funkce, funkcí $x \mapsto \sin(nx)$ a $x \mapsto \cos(nx)$, kde $n \in \mathbb{N}$ (nebo ekvivalentně $x \mapsto \mathrm{e}^{inx}$, $n \in \mathbb{Z}$).

Pokud bychom chtěli studovat l-periodické funkce, nabízejí se jako základní stavební kameny „přeškálované“ funkce $x \mapsto \sin(\frac{2\pi}{l} nx)$ a $x \mapsto \cos(\frac{2\pi}{l} nx)$, kde $n \in \mathbb{N}$ (nebo ekvivalentně $x \mapsto \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} nx/l}$, $n \in \mathbb{Z}$), které jsou l-periodické. Ukažme, jak se změní základní výsledky, které jsme odvodili v předchozích částech textu.

Nechť je dána funkce $f \in L^1([a, b])$, kde $l = b - a$. Její komplexní Fourierova řada má tvar

$$F(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} nx/l},$$

přičemž komplexní Fourierovy koeficienty jsou dány vztahem

$$c_n = \frac{1}{l} \int_a^b f(x) \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} nx/l} \,\mathrm{d}x, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

[10] Nalezení hodnoty tohoto součtu je známo jako basilejský problém, který roku 1734 vyřešil Leonhard Euler. Jiný způsob, jak dospět k řešení, byl naznačen ve cvičení 1.3.4.

Pokud navíc $f \in L^2([a,b])$, pak platí Parsevalova rovnost ve tvaru

$$\frac{1}{l}\int_a^b |f(x)|^2\,\mathrm{d}x = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|^2.$$

Reálná Fourierova řada reálné funkce $f \in L^1([a,b])$ má tvar

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\left(\frac{2\pi}{l}nx\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi}{l}nx\right)\right),$$

přičemž reálné Fourierovy koeficienty se počítají podle vztahů

$$a_n = \frac{2}{l}\int_a^b f(x)\cos\left(\frac{2\pi}{l}nx\right)\,\mathrm{d}x, \quad n \in \mathbb{N}_0, \tag{1.8.1}$$

$$b_n = \frac{2}{l}\int_a^b f(x)\sin\left(\frac{2\pi}{l}nx\right)\,\mathrm{d}x, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{1.8.2}$$

Pro reálnou funkci $f \in L^2([a,b])$ platí Parsevalova rovnost ve tvaru

$$\frac{2}{l}\int_a^b f(x)^2\,\mathrm{d}x = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2).$$

K vyšetření konvergence komplexní i reálné Fourierovy řady lze použít analogie věty 1.2.4 a důsledku 1.2.5, přičemž stačí nahradit interval $[-\pi,\pi]$ intervalem $[a,b]$.

Čtenáři by nemělo činit potíže rozmyslet si, jak dojít k těmto výsledkům na základě jednoduchých modifikací úvah z předchozích částí textu. Pro úplnost ještě poznamenejme, že ortonormální množinu M z části 1.6 je v obecném případě potřeba nahradit množinou

$$M = \left\{\frac{\mathrm{e}^{inx}}{\sqrt{l}} : n \in \mathbb{Z}\right\},$$

která je ortonormální v $L^2([a,b])$.

Příklad 1.8.1. Najdeme reálnou Fourierovu řadu funkce

$$f(x) = x, \quad x \in [0, 2\pi],$$

a vyšetříme její konvergenci. Doporučujeme čtenáři, aby srovnal výpočet s příkladem 1.3.3, kde byla stejná funkce zadána na intervalu $[-\pi,\pi]$.

Použijeme vztahy (1.8.1) a (1.8.2), do kterých dosadíme $l = 2\pi$. Skutečnost, že f je lichá, nám tentokrát při výpočtu Fourierových koeficientů nepomůže, neboť integrujeme přes interval $[0, 2\pi]$:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{2\pi} = 2\pi,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\cos(nx)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\left(\left[\frac{x\sin(nx)}{n}\right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi}\frac{\sin(nx)}{n}\,\mathrm{d}x\right) = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\cos(nx)}{n^2}\right]_0^{2\pi} = 0,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\sin(nx)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\left(\left[\frac{-x\cos(nx)}{n}\right]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi}\frac{\cos(nx)}{n}\,\mathrm{d}x\right) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{-2\pi}{n} + \left[\frac{\sin(nx)}{n^2}\right]_0^{2\pi}\right) = -\frac{2}{n}.$$

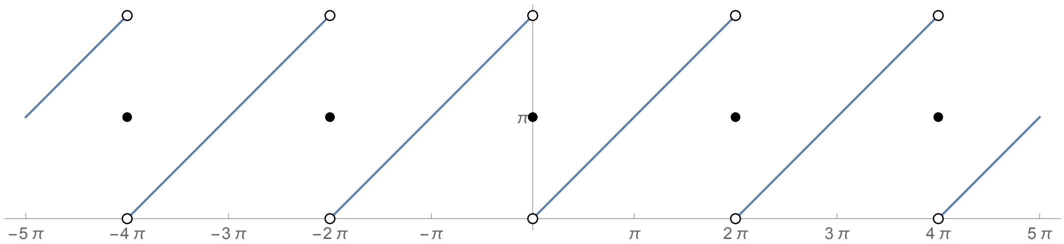
Dostáváme tedy Fourierovu řadu

$$F(x) = \pi + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{-2}{n}\sin(nx).$$

K vyšetření konvergence použijeme modifikaci důsledku 1.2.5 pro interval $[0, 2\pi]$. Protože f je po částech diferencovatelná a spojitá na $[0, 2\pi]$, dostáváme $F(x) = f(x)$ pro všechna $x \in (0, 2\pi)$ a dále

$$F(0) = F(2\pi) = \frac{f(0) + f(2\pi)}{2} = \frac{0 + 2\pi}{2} = \pi.$$

Chování Fourierovy řady na zbytku reálné osy je zřejmé z toho, že F je 2π-periodická. Její graf je na obr. 1.8.



Obrázek 1.8: Fourierova řada funkce $f(x) = x$, $x \in [0, 2\pi]$

Cvičení 1.8.2. Najděte reálnou Fourierovu řadu funkce

$$f(x) = \cos x, \quad x \in [-\pi/2, \pi/2],$$

a vyšetřete její konvergenci. Pomocí Parsevalovy rovnosti získejte součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n^2-1)^2}$.

Návod: Pro všechna $a, b \in \mathbb{R}$ platí

$$\cos a \cdot \cos b = \frac{1}{2}(\cos(a + b) + \cos(a - b)).$$

Cvičení 1.8.3. Najděte reálnou Fourierovu řadu funkce

$$f(x) = x + \cos x, \quad x \in [0, 4\pi],$$

a vyšetřete její konvergenci.

Návod: Pro všechna $a, b \in \mathbb{R}$ platí

$$\cos a \cdot \cos b = \frac{1}{2}(\cos(a + b) + \cos(a - b)),$$
$$\sin a \cdot \cos b = \frac{1}{2}(\sin(a + b) + \sin(a - b)).$$

Kapitola 2

Metrické prostory

2.1 Abstraktní prostory

K základní pojmům klasické matematické analýzy tak, jak byla studována do začátku 20. století, patří zejména:

- Posloupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ a nekonečné řady $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, kde x_n jsou reálná nebo komplexní čísla. Klíčovou otázkou je konvergence takovýchto posloupností a řad.
- Funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$. Klíčovými pojmy jsou limita funkce, spojitost, derivace, integrál.

Moderní matematická analýza tyto pojmy zobecňuje a pracuje s následujícími objekty:

- Posloupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ a nekonečné řady $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, kde x_n jsou prvky abstraktního prostoru.
- Funkce $f : X \to Y$, kde X, Y jsou abstraktní prostory.

Co přesně znamená pojem „abstraktní prostor“? V matematické analýze se nejčastěji setkáme se třemi druhy prostorů:

- Metrické prostory, tj. prostory, ve kterých umíme měřit vzdálenosti bodů. To umožňuje zavést pojmy jako limita a spojitost.
- Normované lineární (vektorové) prostory, kde umíme sčítat a odčítat vektory, násobit je skaláry, ale též měřit velikosti vektorů pomocí normy. To umožňuje definovat pojmy jako součet nekonečné řady, derivace, integrál.
- Prostory se skalárním součinem, kde navíc můžeme měřit úhly mezi vektory a používat Pythagorovu větu. Již víme, že tyto prostory jsou vhodné např. ke studiu Fourierových řad.

Proč je výhodné pracovat s abstraktními prostory?

- Je možné zavést jednotné definice základních pojmů. Nemusíme např. zvlášť definovat spojitost pro funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ a $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$, protože se jedná o speciální případy obecné definice spojitosti pro zobrazení mezi metrickými prostory.
- Chceme rozšířit pojmy jako je limita, spojitost, součet nekonečné řady apod. tak, aby dávaly smysl nejen v $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{C}^n$, ale i v nekonečnědimenzionálních prostorech, jako jsou prostory posloupností a prostory funkcí.

2.1.1 Definice abstraktních prostorů

Začneme definicemi všech tří druhů abstraktních prostorů.

Definice 2.1.1. *Metrický prostor* je libovolná množina $X \neq \emptyset$, na které je definována funkce $d : X \times X \to \mathbb{R}$ (metrika) splňující následující požadavky:

(i) $\forall x, y \in X\ d(x,y) \geq 0$.

(ii) $\forall x, y \in X\ d(x,y) = 0 \iff x = y$.

(iii) $\forall x, y \in X\ d(x,y) = d(y,x)$.

(iv) $\forall x, y, z \in X\ d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ (trojúhelníková nerovnost pro metriku).

Definice 2.1.2. *Normovaný lineární prostor* (nebo též *normovaný vektorový prostor*) je libovolný vektorový prostor X nad $\mathbb{R}$, na kterém je definována funkce $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ (norma) splňující následující požadavky:

(i) $\forall x \in X\ \|x\| \geq 0$.

(ii) $\forall x \in X\ \|x\| = 0 \iff x = 0$ (používáme stejné označení pro nulový vektor v X a pro číslo nula, význam je zřejmý z kontextu).

(iii) $\forall a \in \mathbb{R}\ \forall x \in X\ \|ax\| = |a|\,\|x\|$.

(iv) $\forall x, y \in X\ \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (trojúhelníková nerovnost pro normu).

Definice 2.1.3. *Prostor se skalárním součinem* je libovolný vektorový prostor X nad $\mathbb{R}$, na kterém je definována funkce $\cdot : X \times X \to \mathbb{R}$ (skalární součin) splňující následující požadavky:

(i) $\forall x \in X\ x \cdot x \geq 0$.

(ii) $\forall x \in X\ x \cdot x = 0 \iff x = 0$.

(iii) $\forall x, y \in X\ x \cdot y = y \cdot x$.

(iv) $\forall a, b \in \mathbb{R}\ \forall x, y, z \in X\ (ax + by) \cdot z = a(x \cdot z) + b(y \cdot z)$.

Často se pracuje i s vektorovými prostory nad tělesem komplexních čísel. V definici normovaného lineárního prostoru pak podmínka (iii) musí platit pro každé $a \in \mathbb{C}$, v definici prostoru se skalárním součinem je podmínka (iii) nahrazena podmínkou $x \cdot y = \overline{y \cdot x}$ a podmínka (iv) musí platit pro všechna $a, b \in \mathbb{C}$.

Následující dvě věty ukazují, že každý normovaný lineární prostor je zároveň metrický prostor, a každý prostor se skalárním součinem je též normovaný lineární prostor.

Věta 2.1.4. *Je-li X normovaný lineární prostor, pak funkce $d : X \times X \to \mathbb{R}$ definovaná předpisem*

$$d(x,y) = \|x-y\|, \quad x, y \in X,$$

je metrika na X.

Důkaz. Podmínky (i), (ii), (iii) z definice metriky se snadno ověří pomocí podmínek (i), (ii), (iii) z definice normy. Trojúhelníková nerovnost pro metriku plyne z trojúhelníkové nerovnosti pro normu:

$$d(x,y) = \|x-y\| = \|x-z+z-y\| \leq \|x-z\| + \|z-y\| = d(x,z) + d(z,y). \qquad \square$$

Věta 2.1.5. *Je-li X prostor se skalárním součinem, pak funkce $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ definovaná předpisem*

$$\|x\| = \sqrt{x \cdot x}, \quad x \in X,$$

je norma na X.

Důkaz. Podmínky (i), (ii), (iii) z definice normy se snadno ověří pomocí podmínek (i), (ii), (iii), (iv) z definice skalárního součinu. K ověření trojúhelníkové nerovnosti pro normu využijeme Cauchyovu-Schwarzovu nerovnost $|x \cdot y| \leq \|x\| \, \|y\|$, která platí v každém prostoru se skalárním součinem (viz přednášku z lineární algebry):

$$\|x+y\|^2 = (x+y)\cdot(x+y) = x\cdot x + x\cdot y + y\cdot x + y\cdot y \leq \|x\|^2 + 2\|x\|\,\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\|+\|y\|)^2. \qquad \square$$

2.1.2 Příklady prostorů

Příklad 2.1.6. Nejjednodušími příklady prostorů se skalárním součinem jsou $\mathbb{R}^n$, resp. $\mathbb{C}^n$. Skalární součin dvou vektorů $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ a $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{C}^n$ je

$$x \cdot y = \sum_{i=1}^{n} x_i \, \overline{y_i}.$$

Tento skalární součin podle věty 2.1.5 určuje následující (tzv. eukleidovskou) normu:

$$\|x\| = \sqrt{x \cdot x} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}$$

(pro reálné vektory lze vynechat absolutní hodnotu). Věta 2.1.4 pak udává způsob, jak lze zavést (tzv. eukleidovskou) metriku:

$$d(x,y) = \|x-y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2}.$$

To však není jediný způsob, jak definovat normu (a tím pádem i metriku) na $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{C}^n$. Další možnosti jsou např. maximová (suprémová) norma

$$\|x\|_\infty = \max(|x_1|, \dots, |x_n|)$$

nebo součtová norma

$$\|x\|_1 = |x_1| + \cdots + |x_n|.$$

Obecněji, pro každé $p \in [1, \infty)$ je předpisem

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p} \tag{2.1.1}$$

definována norma na $\mathbb{R}^n$ nebo $\mathbb{C}^n$. Je zřejmé, že podmínky (i), (ii), (iii) z definice normy jsou splněny. Trojúhelníková nerovnost z podmínky (iv) má tvar

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p \right)^{1/p} \tag{2.1.2}$$

a jde o tzv. Minkowského nerovnost pro vektory. Z přednášky Matematická analýza V víme, že jde o speciální případ obecné Minkowského nerovnosti v prostorech L^p.[1]

Eukleidovská norma a součtová norma jsou speciálními případy normy (2.1.1) pro $p = 2$ a $p = 1$. Maximová norma je limitou normy (2.1.1) pro $p \to \infty$: Pro každé $x \in \mathbb{C}^n$ platí

$$\|x\|_\infty^p = \max(|x_1|^p, \dots, |x_n|^p) \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \leq n \max(|x_1|^p, \dots, |x_n|^p) = n\|x\|_\infty^p,$$

[1] Důkaz Minkowského nerovnosti, který nevyužívá znalostí o prostorech L^p, lze najít např. v učebnicích I. Netuka: *Základy moderní analýzy*, Matfyzpress, 2014 (tvrzení 1.10.4) nebo J. Veselý: *Základy matematické analýzy. Druhý díl*, Matfyzpress, 2009 (lemma 12.3.10).

a tudíž

$$\|x\|_\infty \le \|x\|_p \le n^{1/p}\,\|x\|_\infty.$$

Levá i pravá strana mají pro $p \to \infty$ limitu $\|x\|_\infty$, a proto $\lim_{p\to\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$, čímž je zdůvodněno značení maximové normy.

Není-li řečeno jinak, pak na $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{C}^n$ uvažujeme eukleidovskou normu. Chceme-li na $\mathbb{R}^n$ pracovat s normou (2.1.1), pak místo $\mathbb{R}^n$ obvykle píšeme ℓ^p_n, zatímco $\mathbb{R}^n$ s maximovou normou se zkráceně značí ℓ^∞_n.

Příklad 2.1.7. Na posloupnosti lze nahlížet jako na vektory s nekonečně mnoha složkami. Je tedy přirozené pokusit se definovat normu posloupnosti předpisem

$$\|\{x_i\}_{i=1}^\infty\| = \sqrt{\sum_{i=1}^\infty |x_i|^2}. \tag{2.1.3}$$

V definici normy se však požaduje, aby jejími hodnotami byla pouze reálná čísla, proto je nutné omezit se na posloupnosti splňující podmínku $\sum_{i=1}^\infty |x_i|^2 < \infty$. Obecněji, pro každé $p \in [1,\infty)$ definujeme prostor ℓ^p jako prostor všech posloupností splňujících podmínku $\sum_{i=1}^\infty |x_i|^p < \infty$ a příslušná norma je pak dána předpisem

$$\|\{x_i\}_{i=1}^\infty\|_p = \left(\sum_{i=1}^\infty |x_i|^p\right)^{1/p}. \tag{2.1.4}$$

Opět je zřejmé, že podmínky (i), (ii), (iii) z definice normy jsou splněny. Trojúhelníková nerovnost z podmínky (iv) má tvar

$$\left(\sum_{i=1}^\infty |x_i+y_i|^p\right)^{1/p} \le \left(\sum_{i=1}^\infty |x_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^\infty |y_i|^p\right)^{1/p}, \tag{2.1.5}$$

což je Minkowského nerovnost pro posloupnosti.[2]

Mezi všemi prostory ℓ^p má důležité místo prostor ℓ^2, na kterém je definován skalární součin

$$\{x_i\}_{i=1}^\infty \cdot \{y_i\}_{i=1}^\infty = \sum_{i=1}^\infty x_i\,\overline{y_i} \tag{2.1.6}$$

(z tohoto skalárního součinu pak pomocí věty 2.1.5 dostaneme normu (2.1.3)). Nekonečnědimenzionální verzí prostoru ℓ^∞_n je prostor ℓ^∞ tvořený všemi omezenými posloupnostmi, na kterém uvažujeme suprémovou normu

$$\|\{x_i\}_{i=1}^\infty\|_\infty = \sup_{i\in\mathbb{N}} |x_i|. \tag{2.1.7}$$

Příklad 2.1.8. Vektorový prostor tvořený všemi konvergentními posloupnostmi se značí c. Jeho podprostorem je prostor c_0 tvořený všemi posloupnostmi, které mají nulovou limitu. Platí

$$c_0 \subset c \subset \ell^\infty,$$

neboť každá konvergentní posloupnost je omezená. V prostorech c a c_0 tedy můžeme pracovat se suprémovou normou z ℓ^∞.

Příklad 2.1.9. V teorii Lebesgueova integrálu hrají důležitou roli následující prostory funkcí, se kterými jsme pracovali již v kapitole 1: Pro každé $p \in [1,\infty)$ definujeme

$$L^p(X,\mu) = \{f : X \to \mathbb{C} : f \text{ je měřitelná a } \int_X |f|^p \,\mathrm{d}\mu < \infty\}.$$

[2] Z přednášky Matematická analýza V opět víme, že jde o speciální případ obecné Minkowského nerovnosti v prostorech L^p. K nerovnosti (2.1.5) lze jednoduše dospět i tak, že vyjdeme ze vztahu (2.1.2) a přejdeme k limitě pro $n \to \infty$.

Pro každou $f \in L^p(X,\mu)$ pak položíme

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p \, \mathrm{d}\mu \right)^{1/p}.$$

Funkce $\|\cdot\|_p$ splňuje podmínky (i), (iii), (iv) z definice normy, avšak nesplňuje podmínku (ii): Z $\|f\|_p = 0$ neplyne $f = 0$, ale pouze $f(x) = 0$ pro skoro všechna $x \in X$. Zavádíme proto úmluvu, že funkce rovnající se skoro všude považujeme za totožné. Prvky prostoru $L^p(X,\mu)$ tedy vlastně nejsou funkce, ale třídy ekvivalentních funkcí.

Víme, že v teorii Fourierových řad je důležitý prostor $L^2(X,\mu)$, který má mezi prostory L^p výjimečné postavení, jde totiž o prostor se skalárním součinem

$$f \cdot g = \int_X f(x)\overline{g(x)} \, \mathrm{d}\mu.$$

Tomuto skalárnímu součinu odpovídá norma

$$\|f\|_2 = \sqrt{f \cdot f} = \sqrt{\int_X |f(x)|^2 \, \mathrm{d}\mu}.$$

Míra μ je nejčastěji Lebesgueova míra a v tomto případě pak místo $L^p(X,\mu)$ píšeme stručně $L^p(X)$.

Pokud za μ vezmeme tzv. aritmetickou míru, která každé množině přiřadí počet jejích prvků, pak integrál funkce $f : \{1,\dots,n\} \to \mathbb{R}$ vzhledem k aritmetické míře je součet $\sum_{i=1}^n f(i)$. Prostor $L^p(\{1,\dots,n\},\mu)$ pak není nic jiného, než prostor ℓ_n^p zavedený v příkladu 2.1.6. Podobně prostor $L^p(\mathbb{N},\mu)$ se shoduje s prostorem posloupností ℓ^p z příkladu 2.1.7.

Příklad 2.1.10. V analýze se často pracuje ještě s jiným prostorem funkcí: $C([a,b])$ je prostor všech spojitých reálných (případně komplexních) funkcí definovaných na $[a,b]$. Na tomto prostoru uvažujeme suprémovou normu

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$$

(ze spojitosti f plyne, že suprémum je konečné číslo). Této normě pak odpovídá metrika

$$d(f,g) = \sup_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)|,$$

pomocí které měříme vzdálenost dvou spojitých funkcí na $[a,b]$.

Každá spojitá funkce $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ je zároveň prvkem prostoru $L^p([a,b])$, protože integrál spojité funkce na omezeném uzavřeném intervalu (který existuje i jako Riemannův integrál) je konečné číslo. Platí tedy $C([a,b]) \subset L^p([a,b])$, je však třeba mít na paměti, že v těchto prostorech pracujeme s odlišnými normami.

Příklad 2.1.11. Nechť X je libovolná neprázdná množina. Definujme $d(x,y) = 0$ pro $x = y$ a $d(x,y) = 1$ v opačném případě. Pak d je metrika (ověřte podmínky z definice metriky) a hovoříme o tzv. diskrétním metrickém prostoru na množině X. Uvidíme, že tento prostor má poněkud zvláštní vlastnosti a často se používá jako protipříklad na nejrůznější hypotézy o metrických prostorech.

2.1.3 Cvičení

Cvičení 2.1.12. Pro jaká $p \in [1,\infty)$ platí, že funkce $f(x) = 1/x$ je prvkem prostoru $L^p([1,\infty))$?

Cvičení 2.1.13. Pro jaká $p \in [1,\infty)$ platí, že funkce $f(x) = 1/\sqrt{x}$ je prvkem prostoru $L^p((0,1))$?

Cvičení 2.1.14. Pro jaká $p \in [1,\infty]$ platí, že posloupnost $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^\infty$ je prvkem prostoru ℓ^p? Je prvkem c a c_0?

Cvičení 2.1.15. Nechť $q > 1$ je jisté reálné číslo. Najděte příklad reálné posloupnosti, která neleží v prostoru ℓ^q, ale leží v ℓ^p pro každé $p > q$.

Cvičení 2.1.16. Ukažte, že pokud $p \in (0,1)$, pak funkce

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}$$

není norma na prostoru $\mathbb{R}^n$, kde $n \geq 2$. (Najděte příklad ukazující, že některá z podmínek v definici normy je porušena.)

Cvičení 2.1.17. a) Dokažte, že pokud v libovolném prostoru X se skalárním součinem definujeme normu předpisem $\|x\| = \sqrt{x \cdot x}$, pak platí tzv. rovnoběžníkové pravidlo

$$\forall x, y \in X \quad \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Jaká je jeho geometrická interpretace v $\mathbb{R}^2$?

b) Pro každé $p \in [1,2) \cup (2,\infty)$ najděte vektory $x, y \in \ell^p_n$, $n \geq 2$, které nesplňují rovnoběžníkové pravidlo, tj.

$$\|x+y\|_p^2 + \|x-y\|_p^2 \neq 2(\|x\|_p^2 + \|y\|_p^2).$$

Z toho plyne, že v prostoru ℓ^p_n s výjimkou $p = 2$ nelze definovat skalární součin, ze kterého by byla odvozena norma $\|\cdot\|_p$.

2.2 Metrické prostory – základní pojmy

V této části zavedeme některé základní geometrické pojmy v metrických prostorech a ilustrujeme je na jednoduchých příkladech. V celém textu předpokládáme, že X je metrický prostor s metrikou d.

2.2.1 Otevřené a uzavřené koule

Definice 2.2.1. *Otevřená koule se středem $x \in X$ a poloměrem $r > 0$ je množina*

$$B_r(x) = \{y \in X : d(y,x) < r\}.$$

Uzavřená koule se středem $x \in X$ a poloměrem $r \geq 0$ je množina

$$K_r(x) = \{y \in X : d(y,x) \leq r\}.$$

Pokud je X normovaný lineární prostor, pak metrika je určena normou a platí

$$B_r(x) = \{y \in X : \|y-x\| < r\}, \quad K_r(x) = \{y \in X : \|y-x\| \leq r\}.$$

Zkusíme prozkoumat, jak vypadají koule v některých prostorech zavedených v části 2.1.

Příklad 2.2.2. Nechť $X = \mathbb{R}$ se standardní eukleidovskou metrikou. Pak platí $B_r(x) = (x-r, x+r)$ a $K_r(x) = [x-r, x+r]$.

Příklad 2.2.3. Popíšeme, jak vypadají koule v prostoru ℓ^p_2, tj. v $\mathbb{R}^2$ s normou $\|y\|_p = (|y_1|^p + |y_2|^p)^{1/p}$ pro $p \in [1,\infty)$, případně $\|y\|_\infty = \max(|y_1|, |y_2|)$. Podle definice

$$K_r(x) = \{y \in \ell^p_2 : \|y-x\|_p \leq r\}, \quad B_r(x) = \{y \in \ell^p_2 : \|y-x\|_p < r\}.$$

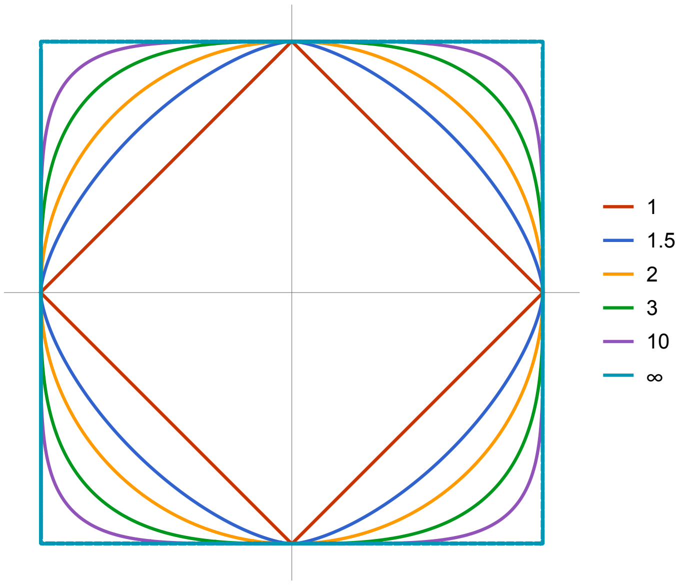
Stačí se omezit na koule se středem v počátku, ostatní získáme posunutím.

Pro $p = 2$ je $K_r(0) = \{y \in \ell_2^p : (|y_1|^2 + |y_2|^2)^{1/2} \leq r\}$, což je eukleidovský kruh se středem v počátku a poloměrem r.

Pro $p = 1$ je $K_r(0) = \{y \in \ell_2^p : |y_1| + |y_2| \leq r\}$. V prvním kvadrantu, kde lze vynechat absolutní hodnoty, nerovnost $y_1 + y_2 \leq r$ popisuje trojúhelník s vrcholy v bodech $[0, 0]$, $[r, 0]$, $[0, r]$. Ve zbývajících kvadrantech je situace symetrická, tedy $K_r(0)$ je čtverec s vrcholy v bodech $[r, 0]$, $[0, r]$, $[-r, 0]$, $[0, -r]$.

Pro $p = \infty$ je $K_r(0) = \{y \in \ell_2^p : \max(|y_1|, |y_2|) \leq r\}$. Příslušná nerovnost je splněna, právě když $|y_1| \leq r$ a zároveň $|y_2| \leq r$. Vidíme, že $K_r(0) = [-r, r] \times [-r, r]$, což je čtverec s vrcholy v bodech $[r, r]$, $[-r, r]$, $[-r, -r]$, $[r, -r]$.

Obecnou situaci znázorňuje obr. 2.1, kde jsou vyznačeny hranice uzavřených koulí $K_r(0)$ v závislosti na volbě p. Pro $p = 1$ je koule nejmenší, s rostoucím p se „nafukuje“ a limitně se blíží ke čtverci $[-r, r] \times [-r, r]$, který odpovídá volbě $p = \infty$.



Obrázek 2.1: $X = \ell_2^p$: Tvary uzavřených koulí v závislosti na volbě $p \in [1, \infty]$

Je zřejmé, jak se liší otevřené koule od uzavřených: Všechny neostré nerovnosti se změní na ostré a hranice už nebude součástí koule.

Podobné úvahy jako v tomto příkladu lze provést i ve vyšších dimenzích, tj. pro $n \geq 3$.

Příklad 2.2.4. Uvažujme prostor $X = \ell^\infty$ všech reálných omezených posloupností se suprémovou normou. Je-li dána posloupnost $x = \{x_i\}_{i=1}^\infty \in \ell^\infty$, jak vypadá uzavřená koule $K_r(x)$? Podle definice

$$K_r(x) = \{y \in \ell^\infty : \|y - x\|_\infty \leq r\}.$$

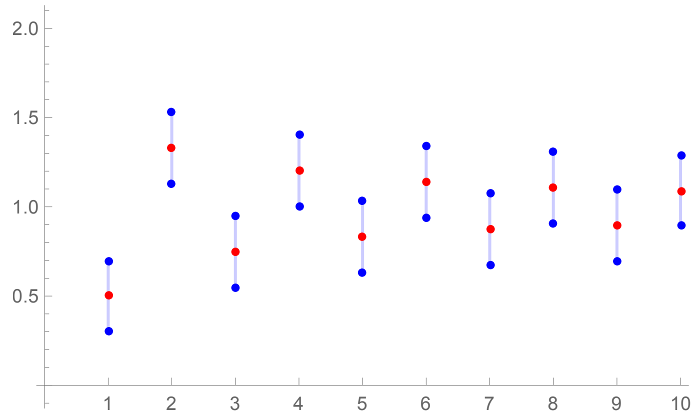
Pro $y = \{y_i\}_{i=1}^\infty$ z definice suprémové normy plyne

$$\|y - x\|_\infty = \sup_{i \in \mathbb{N}} |y_i - x_i|.$$

Tudíž nerovnost $\|y - x\|_\infty \leq r$ je splněna právě tehdy, když $|y_i - x_i| \leq r$ pro každé $i \in \mathbb{N}$. Vidíme, že uzavřená koule $K_r(x)$ je tvořena všemi posloupnostmi $y \in \ell^\infty$ takovými, že pro každé $i \in \mathbb{N}$ platí $y_i \in [x_i - r, x_i + r]$. Geometricky to znamená, že graf posloupnosti y leží v pásu o šířce $2r$ obklopujícím graf posloupnosti x, viz obr. 2.2.

Příklad 2.2.5. Uvažujme prostor $X = C([a, b])$ všech reálných spojitých funkcí na intervalu $[a, b]$ se suprémovou normou. Je-li dána funkce $f \in C([a, b])$, jak vypadá uzavřená koule $K_r(f)$? Podle definice

$$K_r(f) = \{g \in C([a, b]) : \|g - f\|_\infty \leq r\}.$$

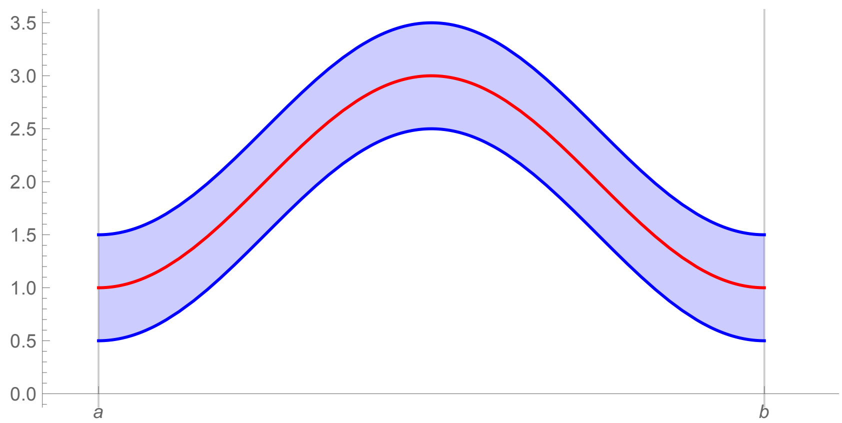


Obrázek 2.2: $X = \ell^\infty$: Uzavřená koule o poloměru r, jejímž středem je červeně znázorněná posloupnost, je tvořena všemi posloupnostmi obsaženými v pásu vyznačeném modrými úsečkami o délce $2r$

Z definice suprémové normy plyne

$$\|g - f\|_\infty = \sup_{x \in [a,b]} |g(x) - f(x)|.$$

Tudíž nerovnost $\|g - f\|_\infty \leq r$ je splněna právě tehdy, když $|g(x) - f(x)| \leq r$ pro každé $x \in [a, b]$. Vidíme, že uzavřená koule $K_r(f)$ je tvořena všemi funkcemi $g \in C([a, b])$ takovými, že pro každé $x \in [a, b]$ platí $g(x) \in [f(x) - r, f(x) + r]$. Geometricky to znamená, že graf funkce g leží v pásu o šířce $2r$ obklopujícím graf funkce f, viz obr. 2.3.



Obrázek 2.3: $X = C([a, b])$: Uzavřená koule o poloměru r, jejímž středem je červeně znázorněná funkce, je tvořena všemi funkcemi obsaženými v modrém pásu o šířce $2r$

2.2.2 Otevřené a uzavřené množiny

Definice 2.2.6. Množina $M \subset X$ se nazývá *otevřená*, pokud pro každé $x \in M$ existuje $r > 0$ takové, že $B_r(x) \subset M$. Množina $M \subset X$ se nazývá *uzavřená*, pokud její doplněk $X \setminus M$ je otevřená množina.

Příklad 2.2.7. Nechť $X = \mathbb{R}$ se standardní eukleidovskou metrikou. Pokud $-\infty < a < b < \infty$, pak otevřený interval (a, b) je otevřená množina a uzavřený interval $[a, b]$ je uzavřená množina. Polootevřený interval $[a, b)$ není otevřená ani uzavřená množina.

Poznámka 2.2.8. Z definice vyplývá, že v libovolném metrickém prostoru X jsou prázdná množina i celý prostor X otevřené množiny, tudíž jsou i uzavřené.

Poznámka 2.2.9. Otevřenost a uzavřenost množiny je vždy vázána na volbu metrického prostoru. Např. interval $(0,1)$ není uzavřená množina v $\mathbb{R}$, ale je to uzavřená množina v prostoru $X = (0,1)$. Podobně interval $[0,1]$ není otevřená množina v $\mathbb{R}$, ale je to otevřená množina v prostoru $X = [0,1]$.

Příklad 2.2.10. V diskrétním metrickém prostoru na libovolné množině X je každá množina $M \subset X$ otevřená: Volíme-li libovolné $x \in M$, pak pro každé $r \in (0,1)$ platí $B_r(x) = \{x\} \subset M$. Jelikož uzavřené množiny jsou doplňky otevřených, vidíme, že každá množina $M \subset X$ je též uzavřená.

Věta 2.2.11. *Pro každé $x \in X$ a $r > 0$ platí, že otevřená koule $B_r(x)$ je otevřená množina a uzavřená koule $K_r(x)$ je uzavřená množina.*

Důkaz. Volme libovolné $y \in B_r(x)$. Chceme dokázat, že existuje $\rho > 0$ splňující $B_\rho(y) \subset B_r(x)$. Je přirozené volit $\rho = r - d(y,x)$ (nakreslete si obrázek v $\mathbb{R}^2$). Pro každé $z \in B_\rho(y)$ pak platí

$$d(z,x) \leq d(z,y) + d(y,x) < \rho + d(y,x) = r,$$

čili $B_\rho(y) \subset B_r(x)$.

Dále chceme dokázat, že $X \setminus K_r(x)$ je otevřená. Volme libovolné $y \in X \setminus K_r(x)$. Tvrdíme, že existuje $\rho > 0$ splňující $B_\rho(y) \subset X \setminus K_r(x)$. Je přirozené volit $\rho = d(y,x) - r$ (nakreslete si obrázek v $\mathbb{R}^2$). Pro každé $z \in B_\rho(y)$ pak platí

$$d(y,z) + d(z,x) \geq d(y,x),$$

tudíž

$$d(z,x) \geq d(y,x) - d(y,z) > d(y,x) - \rho = r.$$

Z $d(z,x) > r$ plyne $z \in X \setminus K_r(x)$, a proto $B_\rho(y) \subset X \setminus K_r(x)$. □

Následující věta říká, že sjednocení libovolně mnoha otevřených množin je otevřená množina. Analogické tvrzení pro průniky platí jen v případě konečného počtu množin.

Věta 2.2.12. *V každém metrickém prostoru X platí následující tvrzení:*

(i) Je-li $I \neq \emptyset$ libovolná indexová množina a pro každé $i \in I$ je $M_i \subset X$ otevřená množina, pak $\bigcup_{i \in I} M_i$ je otevřená.

(ii) Jsou-li $M_1, \dots, M_n \subset X$ otevřené množiny, pak $\bigcap_{i=1}^n M_i$ je otevřená.

Důkaz. K ověření první části si stačí všimnout, že pokud $x \in \bigcup_{i \in I} M_i$, pak $x \in M_i$ pro některé $i \in I$. Z definice otevřenosti pak existuje $r > 0$ takové, že $B_r(x) \subset M_i \subset \bigcup_{i \in I} M_i$.

Pro důkaz druhé části předpokládejme, že $x \in \bigcap_{i=1}^n M_i$. Pak $x \in M_i$ pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$. Z definice otevřenosti pak existují $r_1, \dots, r_n > 0$ taková, že $B_{r_i}(x) \subset M_i$. Volíme-li $r = \min(r_1, \dots, r_n)$, pak $B_r(x) \subset B_{r_i}(x) \subset M_i$ pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$, tudíž $B_r(x) \subset \bigcap_{i=1}^n M_i$. □

Pro uzavřené množiny máme následující variantu předchozí věty.

Věta 2.2.13. *V každém metrickém prostoru X platí následující tvrzení:*

(i) Je-li $I \neq \emptyset$ libovolná indexová množina a pro každé $i \in I$ je $M_i \subset X$ uzavřená množina, pak $\bigcap_{i \in I} M_i$ je uzavřená.

(ii) Jsou-li $M_1, \dots, M_n \subset X$ uzavřené množiny, pak $\bigcup_{i=1}^n M_i$ je uzavřená.

Důkaz. Označme $N_i = X \setminus M_i$; je-li M_i uzavřená, pak N_i je otevřená.

K důkazu první části si stačí uvědomit, že

$$\bigcap_{i \in I} M_i = \bigcap_{i \in I} (X \setminus N_i) = X \setminus \left(\bigcup_{i \in I} N_i \right).$$

Množina vpravo je uzavřená, neboť podle předchozí věty je $\bigcup_{i\in I} N_i$ otevřená.

Důkaz druhé části je podobný:

$$\bigcup_{i=1}^{n} M_i = \bigcup_{i=1}^{n} (X \setminus N_i) = X \setminus \left(\bigcap_{i=1}^{n} N_i \right).$$

Množina vpravo je uzavřená, neboť podle předchozí věty je $\bigcap_{i=1}^{n} N_i$ otevřená. □

2.2.3 Další pojmy

Definice 2.2.14. *Průměr neprázdné množiny $M \subset X$* je definován jako

$$\operatorname{diam} M = \sup\{d(x, y) :\, x, y \in M\}$$

(jde o nezáporné reálné číslo nebo ∞).

Příklad 2.2.15. V prostoru $X = \mathbb{R}^n$ s eukleidovskou metrikou platí

$$\operatorname{diam} K_r(x) = \operatorname{diam} B_r(x) = 2r,$$

čili průměr koule je dvojnásobkem jejího poloměru.

V každém metrickém prostoru X platí $\operatorname{diam} K_r(x) \le 2r$, neboť pro všechna $y_1, y_2 \in K_r(x)$ máme

$$d(y_1, y_2) \le d(y_1, x) + d(x, y_2) \le 2r.$$

Analogicky se dokáže, že $\operatorname{diam} B_r(x) \le 2r$.

Obecně však nemusí platit $\operatorname{diam} K_r(x) = \operatorname{diam} B_r(x)$: V diskrétním metrickém prostoru obsahujícím aspoň dva body stačí vzít libovolný bod x a volit $r = 1$; pak platí $\operatorname{diam} K_r(x) = \operatorname{diam} X = 1$, ale $\operatorname{diam} B_r(x) = \operatorname{diam} \{x\} = 0$ (průměr otevřené koule je tedy menší než její poloměr!).

Definice 2.2.16. Množina $M \subset X$ se nazývá *omezená*, pokud existují $x \in X$ a $r > 0$ takové, že $M \subset B_r(x)$.

Příklad 2.2.17. V diskrétním metrickém prostoru je každá množina omezená, neboť se vejde do otevřené koule s libovolným středem a poloměrem větším než 1.

Poznámka 2.2.18. Rozmyslete si následující pozorování:

- V definici omezené množiny lze místo $B_r(x)$ ekvivalentně psát $K_r(x)$, neboť každá uzavřená koule se vejde do otevřené koule s větším poloměrem.
- Množina je omezená, právě když má konečný průměr.
- Je-li X normovaný lineární prostor, pak v definici omezené množiny stačí uvažovat koule se středem v 0, neboť každá koule se vejde do dostatečně velké koule se středem v 0. Jinými slovy, množina M v normovaném lineárním prostoru je omezená, právě když existuje $r > 0$ takové, že pro každé $y \in M$ platí $\|y\| < r$.

Definice 2.2.19. *Vzdálenost bodu $x \in X$ od neprázdné množiny $M \subset X$* je číslo

$$d(x, M) = \inf\{d(x, y) :\, y \in M\}.$$

Vzdálenost dvou neprázdných množin $M, N \subset X$ je číslo

$$d(M, N) = \inf\{d(x, y) :\, x \in M,\, y \in N\}.$$

Příklad 2.2.20. Je-li $X = \mathbb{R}$ s eukleidovskou metrikou, pak

$$d(0, (0, 1]) = 0, \quad d([0, 1], [2, 3]) = 1, \quad d([0, 1], (1, 2)) = 0.$$

Je zřejmé, že pokud $x \in M$, pak $d(x, M) = 0$. První rovnost na předchozím řádku ukazuje, že obrácená implikace neplatí.

2.2.4 Cvičení

Cvičení 2.2.21. V metrickém prostoru $X = \mathbb{R}$ najděte příklad ukazující, že průnik nekonečně mnoha otevřených množin nemusí být otevřená množina.

Cvičení 2.2.22. V metrickém prostoru $X = \mathbb{R}$ najděte příklad ukazující, že sjednocení nekonečně mnoha uzavřených množin nemusí být uzavřená množina.

Cvičení 2.2.23. Najděte příklad metrického prostoru a dvou jeho podmnožin, které jsou uzavřené, disjunktní a mají nulovou vzdálenost.

Cvičení 2.2.24. Ověřte, že funkce

$$d(a,b) = \left|\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right|, \quad a, b \in \mathbb{N},$$

je metrika na množině $\mathbb{N}$. Popište, jak v tomto metrickém prostoru vypadají omezené množiny.

Cvičení 2.2.25. V prostoru reálných posloupností ℓ^2 s normou $\|\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\|_2 = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2}$ uvažujme množinu

$$M = \{\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell^2 : |x_n| \leq 1 \text{ pro každé } n \in \mathbb{N}\}.$$

Je tato množina omezená? Jaký je její průměr?

2.3 Klasifikace bodů v metrických prostorech

Dále zavedeme některé pojmy, které charakterizují vztah bodu $x \in X$ k množině $M \subset X$, a ilustrujeme je na jednoduchých příkladech. I nadále předpokládáme, že X je metrický prostor s metrikou d.

2.3.1 Vnitřní, vnější a hraniční body

Definice 2.3.1. Nechť je dána množina $M \subset X$.

- Bod $x \in X$ se nazývá *vnitřním bodem* množiny M, pokud existuje $r > 0$ takové, že $B_r(x) \subset M$.
- Bod $x \in X$ se nazývá *vnějším bodem* množiny M, pokud existuje $r > 0$ takové, že $B_r(x) \subset X \setminus M$.
- Bod $x \in X$ je *hraničním bodem* množiny M, pokud není jejím vnitřním ani vnějším bodem.
- *Vnitřek* množiny M je množina všech jejích vnitřních bodů, značí se M°.
- *Hranice* množiny M je množina všech jejích hraničních bodů, značí se ∂M.
- *Uzávěr* množiny M je množina $\overline{M} = M \cup \partial M$.

Příklad 2.3.2. Nechť $X = \mathbb{R}$ se standardní eukleidovskou metrikou a $M = [0,1)$. Vnitřními body M jsou všechny body z intervalu $(0,1)$, vnějšími body jsou všechny body z $(-\infty, 0) \cup (1, \infty)$ a hraničními body jsou 0 a 1. Platí tedy

$$M^\circ = (0,1), \quad \partial M = \{0,1\}, \quad \overline{M} = [0,1].$$

Poznámka 2.3.3. Rozmyslete si následující jednoduchá tvrzení:

- Je-li x vnitřní bod M, pak $x \in M$. Je-li x vnější bod M, pak $x \notin M$. Hraniční bod může, ale nemusí být prvkem M.
- x je vnější bod $M \iff x$ je vnitřní bod $X \setminus M$.

- x je hraniční bod $M \iff$ pro každé $r > 0$ má $B_r(x)$ neprázdný průnik s M i s $X \setminus M \iff x$ je hraniční bod $X \setminus M$.

Následující věta představuje alternativní způsoby, jak popsat uzávěr a hranici libovolné množiny.

Věta 2.3.4. *Pro každou množinu $M \subset X$ platí následující tvrzení:*

(i) $\overline{M} = M^\circ \cup \partial M$.

(ii) $\partial M = \overline{M} \setminus M^\circ$.

(iii) $\partial M = \overline{M} \cap \overline{X \setminus M}$.

Důkaz. K důkazu prvního tvrzení potřebujeme ověřit $M^\circ \cup \partial M = M \cup \partial M$. Inkluze $M^\circ \cup \partial M \subset M \cup \partial M$ je zřejmá, neboť $M^\circ \subset M$. K důkazu opačné inkluze stačí ověřit $M \subset M^\circ \cup \partial M$, což platí, protože každý bod množiny M je buď jejím vnitřním, nebo hraničním bodem.

Druhé tvrzení plyne z prvního a ze skutečnosti, že M° a ∂M jsou disjunktní.

Dokažme třetí tvrzení: Podle prvního tvrzení platí $x \in \overline{M}$, právě když x je vnitřní nebo hraniční bod M. Podobně platí, že $x \in \overline{X \setminus M}$, právě když x je vnitřní nebo hraniční bod $X \setminus M$. Obě možnosti, tj. $x \in \overline{M}$ a zároveň $x \in \overline{X \setminus M}$, nastanou právě tehdy, když x je hraniční bod M (což je podle poznámky 2.3.3 totéž, jako hraniční bod $X \setminus M$). $\square$

Další věta charakterizuje vztah vnitřku, uzávěru a hranice k otevřeným a uzavřeným množinám.

Věta 2.3.5. *Pro každou množinu $M \subset X$ platí následující tvrzení:*

(i) M *je otevřená* $\iff M^\circ = M$.

(ii) M° *je vždy otevřená množina.*

(iii) M *je uzavřená* $\iff \overline{M} = M$.

(iv) $\overline{M}$ *je vždy uzavřená množina.*

(v) ∂M *je vždy uzavřená množina.*

Důkaz. První tvrzení je zřejmé: Definice otevřené množiny říká, že všechny její body jsou vnitřní.

Druhé tvrzení: Pokud $x \in M^\circ$, pak podle definice vnitřního bodu existuje $r > 0$ takové, že $B_r(x) \subset M$. Tvrdíme, že dokonce $B_r(x) \subset M^\circ$. To plyne z otevřenosti $B_r(x)$: Každý bod z $B_r(x)$ má jisté okolí obsažené v $B_r(x)$, a tedy i v M, tudíž je to vnitřní bod M.

Třetí tvrzení je důsledkem následujících ekvivalencí: $\overline{M} = M \iff \partial M \subset M \iff \partial(X \setminus M) \subset M \iff X \setminus M$ nemá hraniční body ležící v $X \setminus M \iff$ všechny body množiny $X \setminus M$ jsou její vnitřní body $\iff X \setminus M$ je otevřená $\iff M$ je uzavřená.

Čtvrté tvrzení: Stačí dokázat, že $X \setminus \overline{M}$ je otevřená. Jelikož $\overline{M} = M^\circ \cup \partial M$, obsahuje množina $X \setminus \overline{M}$ právě všechny vnější body množiny M. Stačí tedy ověřit, že množina všech vnějších bodů M je otevřená. Tato množina se však shoduje s vnitřkem $X \setminus M$, který je podle druhého tvrzení otevřený.

Páté tvrzení plyne ze vztahu $\partial M = \overline{M} \cap \overline{X \setminus M}$ a ze skutečnosti, že průnik uzavřených množin je uzavřená množina. $\square$

Důsledek 2.3.6. *Pro každou množinu $M \subset X$ platí $(M^\circ)^\circ = M^\circ$, $\overline{\overline{M}} = \overline{M}$.*

2.3.2 Izolované a hromadné body

Definice 2.3.7. Nechť je dána množina $M \subset X$.

- Bod $x \in X$ je *izolovaným bodem* množiny M, pokud existuje $r > 0$ takové, že $B_r(x) \cap M = \{x\}$.
- Bod $x \in X$ je *hromadným bodem* množiny M, pokud pro každé $r > 0$ platí $(B_r(x) \setminus \{x\}) \cap M \neq \emptyset$.

Vyjádřeno slovy: Libovolně malé okolí hromadného bodu x (který může, ale nemusí patřit do M) musí obsahovat nějaký bod z M různý od x. Naopak pro izolovaný bod x, který musí ležet v M, lze najít okolí neobsahující žádný jiný bod z M.

Příklad 2.3.8. Nechť $X = \mathbb{R}$ se standardní eukleidovskou metrikou a $M = \{1\} \cup (2, 3]$. Jediným izolovaným bodem M je 1. Hromadnými body M jsou všechny body z intervalu $[2, 3]$.

Poznámka 2.3.9. Rozmyslete si následující pozorování:

- $x \in X$ je hromadným bodem množiny M, právě když pro každé $r > 0$ obsahuje $B_r(x)$ nekonečně mnoho bodů z M.
- Je-li $x \in X$ vnějším bodem M, pak není izolovaným ani hromadným bodem M.

Následující věta představuje další ekvivalentní způsob, jak popsat uzávěr množiny.

Věta 2.3.10. *Pro každou množinu $M \subset X$ platí, že $\overline{M}$ vznikne z M přidáním všech hromadných bodů M.*

Důkaz. Připomeňme, že $\overline{M} = M \cup \partial M = M^\circ \cup \partial M$.

Pokud $x \in \partial M$, pak pro každé $r > 0$ je $B_r(x) \cap M \neq \emptyset$ (v opačném případě by byl x vnějším bodem M). To však může nastat jen v případě, když $x \in M$ nebo když x je hromadným bodem M.

Obráceně, pokud x je hromadný bod M, pak není vnější, tudíž platí $x \in M^\circ \cup \partial M = \overline{M}$. □

2.3.3 Cvičení

Cvičení 2.3.11. V metrickém prostoru $X = \mathbb{R}$ uvažujme množinu $M = \mathbb{Q}$. Najděte všechny její vnitřní, vnější, hraniční, izolované a hromadné body. Jak vypadá vnitřek, hranice a uzávěr M?

Cvičení 2.3.12. V metrickém prostoru $X = \mathbb{R}$ najděte příklad množiny, která není omezená, má nekonečně mnoho izolovaných bodů, aspoň jeden hromadný bod a žádný vnitřní bod.

Cvičení 2.3.13. V prostoru $\mathbb{R}^2$ s eukleidovskou metrikou uvažujme množinu

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = \sin(1/x)\}.$$

Najděte všechny vnitřní, hraniční, vnější, izolované a hromadné body množiny M. Jak vypadá vnitřek, hranice a uzávěr M?

Cvičení 2.3.14. Rozhodněte, zda v každém metrickém prostoru X platí pro všechna $x \in X$ a $r > 0$ vztah

$$\overline{B_r(x)} = K_r(x).$$

Cvičení 2.3.15. V prostoru všech omezených reálných posloupností ℓ^∞ se suprémovou normou uvažujme množinu

$$M = \{\{x_n\}_{n=1}^\infty \in \ell^\infty : x_1 > x_2\}.$$

Najděte všechny její vnitřní, vnější a hraniční body. Je M otevřená, resp. uzavřená? Jak vypadá vnitřek, hranice a uzávěr M?

Cvičení 2.3.16. V prostoru spojitých reálných funkcí $C([0, 1])$ se suprémovou normou uvažujme množinu

$$M = \{f : [0, 1] \to \mathbb{R} : \ f \text{ je spojitá a } f(0) = f(1)\}.$$

Najděte všechny její vnitřní, vnější a hraniční body. Je M otevřená, resp. uzavřená? Jak vypadá vnitřek, hranice a uzávěr M?

2.4 Limity a spojitost v metrických prostorech

V metrických prostorech lze studovat konvergenci posloupností a spojitost funkcí – definice jsou téměř totožné jako pro reálné posloupnosti a funkce, stačí absolutní hodnotu nahradit obecnou metrikou. Uvidíme, že s konvergencí úzce souvisejí dříve zavedené pojmy hromadného bodu a uzávěru množiny. Stále předpokládáme, že X je metrický prostor s metrikou d.

2.4.1 Limity posloupností

Definice 2.4.1. Posloupnost bodů $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ z X je *konvergentní* a má *limitu* $x \in X$ (píšeme $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ nebo $x_n \to x$), pokud $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists n_0 \in \mathbb{N} \;\; \forall n \geq n_0 \;\; d(x_n, x) < \varepsilon$.

Definice 2.4.2. Posloupnost bodů $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ z X se nazývá *cauchyovská*, pokud $\forall \varepsilon > 0 \, \exists n_0 \in \mathbb{N} \, \forall m, n \geq n_0$ $d(x_n, x_m) < \varepsilon$.

Poznámka 2.4.3. Rozmyslete si následující jednoduchá tvrzení:

- $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, právě když $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$. (V prvním případě jde o limitu posloupnosti v metrickém prostoru X, ve druhém případě o limitu posloupnosti reálných čísel.)
- Je-li X normovaný lineární prostor, pak platí ekvivalence $x_n \to x \iff d(x_n, x) \to 0 \iff \|x_n - x\| \to 0 \iff d(x_n - x, 0) \to 0 \iff x_n - x \to 0$.
- Dřívější definice konvergentních a cauchyovských posloupností v prostoru se skalárním součinem (viz definice 1.5.4 a 1.5.5) představují speciální případy právě uvedených definic.
- Limita posloupnosti v metrickém prostoru je určena jednoznačně. (Pokud by existovaly dvě různé limity, stačí za ε zvolit polovinu jejich vzdálenosti a dojdeme ke sporu.)
- Každá konvergentní posloupnost je cauchyovská a omezená. (Důkaz je stejný jako pro posloupnosti reálných čísel.)

Podíváme se, jak vypadají konvergentní posloupnosti v některých konkrétních metrických prostorech. Z následující věty plyne (pokud volíme $X_1 = \cdots = X_n = \mathbb{R}$ a $d_i(x, y) = |x - y|$), že v prostoru $\mathbb{R}^n$ s normou $\|\cdot\|_p$ nebo $\|\cdot\|_\infty$ (tj. vlastně v ℓ_n^p nebo v ℓ_n^∞) posloupnost bodů konverguje, právě když konverguje po složkách.

Věta 2.4.4. *Nechť $X_1, \ldots, X_n$ jsou metrické prostory s metrikami $d_1, \ldots, d_n$ a $X = X_1 \times \cdots \times X_n$ je metrický prostor s metrikou*

$$\rho_p(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{n} d_i(x_i, y_i)^p \right)^{1/p}$$

pro jisté $p \in [1, \infty)$, případně s metrikou

$$\rho_\infty(x, y) = \max\{d_i(x_i, y_i) : i = 1, \ldots, n\}.$$

Pak posloupnost $\{x^k\}_{k=1}^{\infty}$, kde $x^k = (x_1^k, \ldots, x_n^k) \in X$, má limitu $x = (x_1, \ldots, x_n) \in X$, právě když pro každé $i \in \{1, \ldots, n\}$ platí $\lim_{k\to\infty} x_i^k = x_i$.

Důkaz. Pro všechna $i \in \{1, \ldots, n\}$, $p \in [1, \infty)$ a $y, z \in X$ platí nerovnosti

$$0 \leq d_i(y_i, z_i) \leq \rho_\infty(y, z) \leq \rho_p(y, z) \leq n^{1/p} \rho_\infty(y, z). \tag{2.4.1}$$

Pokud tedy platí $\lim_{k\to\infty} \rho_\infty(x^k, x) = 0$ nebo $\lim_{k\to\infty} \rho_p(x^k, x) = 0$, pak nutně $\lim_{k\to\infty} d_i(x_i^k, x_i) = 0$ pro všechna $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Obráceně, pokud platí $\lim_{k\to\infty} d_i(x_i^k, x_i) = 0$ pro všechna $i \in \{1, \ldots, n\}$, pak z definice ρ_∞ vyplývá $\lim_{k\to\infty} \rho_\infty(x^k, x) = 0$ a z poslední nerovnosti v (2.4.1) též $\lim_{k\to\infty} \rho_p(x^k, x) = 0$ pro všechna $p \in [1, \infty)$. □

Jaká je situace v prostorech posloupností ℓ^p a ℓ^∞? Následující věta říká, že pokud posloupnost posloupností konverguje, pak musí konvergovat po složkách.

Věta 2.4.5. *Nechť $p \in [1, \infty]$. Pokud pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $x^n \in \ell^p$ a $\lim_{n\to\infty} x^n = x \in \ell^p$, pak pro každé $i \in \mathbb{N}$ platí $\lim_{n\to\infty} x_i^n = x_i$.*

Důkaz. Připomeňme, že $\lim_{n\to\infty} x^n = x$ znamená $\lim_{n\to\infty} \|x^n - x\|_p = 0$.

Pro $p = \infty$ plyne dokazované tvrzení z nerovnosti

$$|x_i^n - x_i| \le \sup_{i\in\mathbb{N}} |x_i^n - x_i| = \|x^n - x\|_\infty$$

a pro $p \in [1, \infty)$ z nerovnosti

$$|x_i^n - x_i| \le \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i^n - x_i|^p \right)^{1/p} = \|x^n - x\|_p. \qquad \square$$

Následující příklad ukazuje, že konvergence po složkách je pouze nutná, ale nikoliv postačující podmínka pro konvergenci v ℓ^p.

Příklad 2.4.6. Uvažujme následující posloupnost posloupností:

$$\begin{aligned} x^1 &= (1, 0, 0, 0, 0, \cdots), \\ x^2 &= (1, \frac{1}{2}, 0, 0, 0, \cdots), \\ x^3 &= (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 0, 0, \cdots), \\ x^4 &= (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, 0, \cdots), \quad \text{atd.} \end{aligned}$$

Je tato posloupnost konvergentní v prostoru ℓ^∞? Je konvergentní v prostoru ℓ^1?

Z věty 2.4.5 plyne, že pokud má $\{x^n\}_{n=1}^\infty$ limitu v ℓ^p, $p \in [1, \infty]$, pak se musí jednat o posloupnost získanou „limitováním“ po složkách, tj.

$$x = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \cdots).$$

Tato posloupnost však není prvkem ℓ^1, v tomto prostoru tedy $\{x^n\}_{n=1}^\infty$ nemá limitu. Posloupnost x je omezená, tudíž leží v ℓ^∞. Zbývá ověřit, zda skutečně platí $\lim_{n\to\infty} x^n = x$, tj. zda $\lim_{n\to\infty} \|x - x^n\|_\infty = 0$. To je pravda, neboť

$$\|x - x^n\|_\infty = \|(0, \dots, 0, \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+2}, \dots)\|_\infty = \frac{1}{n+1} \to 0.$$

Ukázali jsme, že v prostoru ℓ^∞ má $\{x^n\}_{n=1}^\infty$ limitu x.

Všimneme si ještě konvergence posloupností v prostoru spojitých funkcí se suprémovou normou, kde je situace jednoduchá.

Věta 2.4.7. *Posloupnost funkcí $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ z $C([a, b])$ má limitu $f \in C([a, b])$, právě když $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ stejnoměrně konverguje k f.*

Důkaz. Víme, že $f_n \to f$ v $C([a, b])$, právě když $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$. Podle definice limity to nastává, právě když

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists n_0 \in \mathbb{N} \;\; \forall n \ge n_0 \;\; \|f_n - f\|_\infty < \varepsilon.$$

Podle definice suprémové normy to je ekvivalentní s tvrzením

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists n_0 \in \mathbb{N} \;\; \forall n \ge n_0 \quad \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

což nastává, právě když

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_0 \ \forall x \in [a,b] \ \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

neboli když $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ stejnoměrně konverguje k f. □

Od příkladů konvergence v konkrétních prostorech se nyní vrátíme zpět k obecnému metrickému prostoru.

Následující věta ukazuje souvislost mezi uzávěrem množiny $M \subset X$ a konvergentními posloupnostmi: Uzávěr M je tvořen všemi body, ke kterým lze dokonvergovat pomocí posloupností z M.

Věta 2.4.8. *Nechť $M \subset X$. Pak $x \in \overline{M}$, právě když existuje posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ tvořená body z M, která má limitu x.*

Důkaz. Pokud $x \in \overline{M}$, pak $x \in M$ nebo $x \in \partial M$. V prvním případě můžeme vzít konstantní posloupnost $x_n = x$, která má jistě limitu x. Ve druhém případě z vlastností hraničního bodu plyne, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ koule $B_{1/n}(x)$ obsahuje aspoň jeden bod z M, nazvěme jej x_n. Je zřejmé, že $x_n \to x$.

Pokud existuje posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ tvořená body z M, která má limitu x, pak pro každé $\varepsilon > 0$ koule $B_\varepsilon(x)$ obsahuje aspoň jeden bod této posloupnosti, čili bod z M. Tudíž x nemůže být vnějším bodem M a je vnitřní nebo hraniční, čili $x \in \overline{M}$. □

Víme, že množina M je uzavřená, právě když $\overline{M} = M$. Z předchozí věty tudíž plyne, že množina je uzavřená, pokud z ní nelze „vykonvergovat“.

Důsledek 2.4.9. *Množina $M \subset X$ je uzavřená, právě když pro každou konvergentní posloupnost bodů z M platí, že její limita leží v M.*

Příklad 2.4.10. Vraťme se ke cvičení 2.3.16, kde byl zadán prostor $X = C([0,1])$ a množina

$$M = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} : \ f \text{ je spojitá a } f(0) = f(1)\}.$$

Jedním z úkolů bylo rozhodnout, zda M je uzavřená. To lze podle definice udělat ověřením, že doplněk M je otevřený. Jiným řešením je použít důsledek 2.4.9. Nechť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost funkcí z M, která má limitu f. Chceme ověřit, že $f \in M$. Víme, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $f_n(0) = f_n(1)$. Podle věty 2.4.7 konverguje $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ stejnoměrně k f, tudíž $f(0) = f(1)$, což znamená, že $f \in M$.

Příklad 2.4.11. Vraťme se ke cvičení 2.3.15, kde byl zadán prostor $X = \ell^\infty$ a množina

$$M = \{\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell^\infty : \ x_1 > x_2\}.$$

Jedním z úkolů bylo najít uzávěr množiny M. Ukažme, jak to lze provést pomocí věty 2.4.8. Chceme zjistit, k jakým posloupnostem lze dokonvergovat pomocí posloupností z M. Nechť $\{x^k\}_{k=1}^{\infty}$ je posloupnost posloupností z M, která má limitu $x \in \ell^\infty$. Víme, že pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí $x_1^k > x_2^k$. Podle věty 2.4.5 pak platí $x_1 = \lim_{k\to\infty} x_1^k \geq \lim_{k\to\infty} x_2^k = x_2$. Tím jsme ukázali, že

$$\overline{M} \subset \{\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell^\infty : \ x_1 \geq x_2\}.$$

K tomu, abychom mohli inkluzi nahradit rovností, musíme dokázat, že každá posloupnost $x \in \ell^\infty$ splňující $x_1 \geq x_2$ je limitou nějaké posloupnosti posloupností z M. To je však jednoduché, stačí vzít

$$x^k = (x_1, x_2 - \frac{1}{k}, x_3, x_4, \ldots), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Pak $x^k \to x$ (protože $\|x^k - x\|_\infty = \frac{1}{k} \to 0$) a pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí $x^k \in M$ (protože $x_1 \geq x_2 > x_2 - \frac{1}{k}$).

Pomocí konvergentních posloupností lze charakterizovat i hromadné body množiny.

Věta 2.4.12. *Nechť $M \subset X$. Pak $x \in X$ je hromadný bod M, právě když existuje posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ tvořená body z $M \setminus \{x\}$, která má limitu x.*

Důkaz. Pokud existuje posloupnost se zmíněnými vlastnostmi, pak pro každé $\varepsilon > 0$ obsahuje $B_\varepsilon(x) \setminus \{x\}$ aspoň jeden člen této posloupnosti, tudíž aspoň jeden bod z M. Tím je ověřeno, že x je hromadný bod M.

Nechť $x \in X$ je hromadný bod M. Z definice hromadného bodu plyne, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ můžeme volit $x_n \in M \setminus \{x\}$ tak, že $d(x_n, x) < \frac{1}{n}$. Takto zkonstruovaná posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je tvořena body z $M \setminus \{x\}$ a z požadavku $d(x_n, x) < \frac{1}{n}$ plyne $x_n \to x$. □

2.4.2 Spojitá zobrazení

Definice 2.4.13. Nechť X, Y jsou metrické prostory. Zobrazení $f : X \to Y$ je *spojité* v bodě $x_0 \in X$, pokud platí $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ d(x, x_0) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$.

Metriku v obou prostorech X, Y značíme stejným písmenem d, i když může jít o dvě různé metriky. Správněji bychom měli psát např. d_X a d_Y, z kontextu však bude vždy jasné, kterou metriku máme na mysli.

Ekvivalentně lze říct, že $f : X \to Y$ je spojité v bodě $x_0 \in X$, pokud $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ f(B_\delta(x_0)) \subset B_\varepsilon(f(x_0))$.[3]

Následující věta představuje Heineho podmínku pro spojitost v obecném metrickém prostoru.

Věta 2.4.14. *Zobrazení $f : X \to Y$ je spojité v bodě $x_0 \in X$, právě když pro každou posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ splňující $x_n \to x_0$ platí $f(x_n) \to f(x_0)$.*

Důkaz. Nechť $f : X \to Y$ je spojité v bodě $x_0 \in X$ a $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost splňující $x_n \to x_0$. Volme $\varepsilon > 0$. Z definice spojitosti existuje $\delta > 0$ takové, že pokud $d(x, x_0) < \delta$, pak $d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$. Z definice limity existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $n \geq n_0$ platí $d(x_n, x_0) < \delta$, a tudíž také $d(f(x_n), f(x_0)) < \varepsilon$.

Místo druhé implikace dokážeme její obměnu. Nechť f není spojité v x_0. Pak existuje $\varepsilon > 0$ takové, že pro každé $\delta > 0$ najdeme $x \in X$ splňující $d(x, x_0) < \delta$ a $d(f(x), f(x_0)) \geq \varepsilon$. Tedy pro každé $n \in \mathbb{N}$ můžeme volit $\delta = \frac{1}{n}$ a najít $x_n \in X$ splňující $d(x_n, x_0) < \frac{1}{n}$ a $d(f(x_n), f(x_0)) \geq \varepsilon$. Tím jsme zkonstruovali posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, která splňuje $x_n \to x_0$, ale nesplňuje $f(x_n) \to f(x_0)$. □

Budeme říkat, že zobrazení $f : X \to Y$ je spojité, pokud je spojité ve všech bodech. Spojitá zobrazení lze charakterizovat pomocí vzorů otevřených, resp. uzavřených množin.

Věta 2.4.15. *Následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) $f : X \to Y$ je spojité zobrazení.

(ii) Pro každou otevřenou množinu $M \subset Y$ je množina $f^{-1}(M)$ otevřená.

(iii) Pro každou uzavřenou množinu $M \subset Y$ je množina $f^{-1}(M)$ uzavřená.

Důkaz. (i)$\Rightarrow$(ii): Nechť $M \subset Y$ je otevřená. Předpokládejme, že $f^{-1}(M)$ je neprázdná (jinak je jistě otevřená) a volme $x_0 \in f^{-1}(M)$. Pak $f(x_0) \in M$ a z definice otevřenosti existuje $\varepsilon > 0$ takové, že $B_\varepsilon(f(x_0)) \subset M$. Jelikož f je spojité v bodě x_0, existuje $\delta > 0$ takové, že $f(B_\delta(x_0)) \subset B_\varepsilon(f(x_0)) \subset M$. Odtud plyne $B_\delta(x_0) \subset f^{-1}(M)$.

(ii)$\Rightarrow$(i): Volme $x_0 \in X$ a ukažme, že f je spojité v x_0. Nechť $\varepsilon > 0$. Jelikož $M = B_\varepsilon(f(x_0))$ je otevřená, její vzor $f^{-1}(M)$ je podle předpokladu též otevřená množina, která navíc obsahuje x_0. Z definice otevřenosti plyne existence $\delta > 0$ takového, že $B_\delta(x_0) \subset f^{-1}(M)$, tudíž $f(B_\delta(x_0)) \subset M = B_\varepsilon(f(x_0))$.

(ii) $\iff$ (iii): Víme, že $M \subset Y$ je uzavřená, právě když $Y \setminus M$ je otevřená. Podobně $f^{-1}(M) \subset X$ je uzavřená, právě když $X \setminus f^{-1}(M)$ je otevřená. Dále platí $X \setminus f^{-1}(M) = f^{-1}(Y \setminus M)$, neboť na obou stranách rovnosti jsou množiny obsahující právě všechny body z X, které f nezobrazí do M. Ukázali jsme tedy, že $f^{-1}(M) \subset X$ je uzavřená, právě když $f^{-1}(Y \setminus M)$ je otevřená. Odtud plyne ekvivalence tvrzení (ii) a (iii), neboť jedno získáme z druhého tak, že od každé množiny Y přejdeme k jejímu doplňku. □

[3] Rozmyslete si, že jde pouze o jiný zápis definice. Na levé straně inkluze je koule v X, zatímco na pravé straně koule v Y.

2.4.3 Lipschitzovská zobrazení a kontrakce

Podíváme se ještě na tři důležité speciální případy spojitých zobrazení.

Definice 2.4.16. Zobrazení $f : X \to Y$ se nazývá *izometrie*, pokud pro všechna $x, y \in X$ platí rovnost $d(f(x), f(y)) = d(x, y)$.

Zobrazení $f : X \to Y$ se nazývá *lipschitzovské*, pokud existuje konstanta $K \geq 0$ taková, že pro všechna $x, y \in X$ platí $d(f(x), f(y)) \leq K d(x, y)$. Pokud lze volit $K < 1$, pak f se nazývá *kontrakce*.

Z definice je zřejmé, že každá izometrie a každá kontrakce je lipschitzovské zobrazení. Dále platí, že každé lipschitzovské zobrazení je spojité (v definici spojitosti stačí volit $\delta = \varepsilon/K$).

Příklad 2.4.17. Každé shodné zobrazení v rovině (např. posunutí nebo otočení) je izometrie. Každá podobnost (např. stejnolehlost) je lipschitzovské zobrazení (přičemž za K volíme koeficient podobnosti). Pokud je koeficient podobnosti menší než 1, pak jde o kontrakci.

Následující tvrzení ukazuje, že vzdálenost bodu od množiny je lipschitzovské (a tedy spojité) zobrazení.

Věta 2.4.18. *Je-li $M \subset X$ neprázdná, pak zobrazení $f : X \to \mathbb{R}$ definované předpisem $f(x) = d(x, M)$ je lipschitzovské, přičemž lze volit $K = 1$.*

Důkaz. Podle definice platí $d(x, M) = \inf_{y \in M} d(x, y)$.

Pro všechna $x_1, x_2 \in X$ a $y \in M$ platí

$$d(x_1, M) \leq d(x_1, y) \leq d(x_1, x_2) + d(x_2, y),$$

tudíž přechodem k infimu přes všechna $y \in M$ dostáváme

$$d(x_1, M) \leq d(x_1, x_2) + d(x_2, M)$$

a po úpravě

$$d(x_1, M) - d(x_2, M) \leq d(x_1, x_2).$$

Protože body x_1, x_2 byly libovolné, můžeme je zaměnit a obdržíme

$$d(x_2, M) - d(x_1, M) \leq d(x_2, x_1) = d(x_1, x_2).$$

Z přechozích dvou nerovností plyne

$$|d(x_1, M) - d(x_2, M)| \leq d(x_1, x_2),$$

neboli $d(f(x_1), f(x_2)) \leq d(x_1, x_2)$. $\square$

Příklad 2.4.19. Ve větě 2.2.11 jsme dokázali, že otevřená koule $B_r(y)$ je otevřená množina a uzavřená koule $K_r(y)$ je uzavřená množina. Ukažme si jiný důkaz: Volíme-li $M = \{y\}$, pak věta 2.4.18 říká, že zobrazení $f(x) = d(x, y)$ je spojité. Dále platí

$$B_r(y) = \{z \in X : d(z, y) < r\} = \{z \in X : f(z) < r\} = f^{-1}((-\infty, r)),$$
$$K_r(y) = \{z \in X : d(z, y) \leq r\} = \{z \in X : f(z) \leq r\} = f^{-1}((-\infty, r]).$$

Jelikož $(-\infty, r)$ je otevřená množina, $f^{-1}((-\infty, r))$ je podle věty 2.4.15 rovněž otevřená. Podobně $(-\infty, r]$ je uzavřená a tedy $f^{-1}((-\infty, r])$ je rovněž uzavřená.

2.4.4 Cvičení

Cvičení 2.4.20. Uvažujme následující posloupnost posloupností:

$$\begin{aligned} x^1 &= (1,0,0,0,0,\cdots), \\ x^2 &= (0,1,0,0,0,\cdots), \\ x^3 &= (0,0,1,0,0,\cdots), \\ x^4 &= (0,0,0,1,0,\cdots), \quad \text{atd.} \end{aligned}$$

Je tato posloupnost konvergentní v prostoru ℓ^p pro nějaké $p \in [1,\infty]$?

Cvičení 2.4.21. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ uvažujme funkci $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ takovou, že $f_n(0) = 0$, $f_n(1/2^n) = 1$, $f_n(1/2^{n-1}) = 0$, na intervalech $[0,1/2^n]$ a $[1/2^n, 1/2^{n-1}]$ je f_n lineární a na $[1/2^{n-1}, 1]$ je nulová. (Načrtněte si graf.) Má posloupnost funkcí $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ limitu v prostoru $C([0,1])$? Má limitu v prostoru $L^1([0,1])$?

Cvičení 2.4.22. V prostoru $X = C([0,1])$ uvažujme množinu

$$M = \{f \in X : f(1/2) > 1/2\}.$$

Jak vypadá její uzávěr? Použijte větu 2.4.8.

Cvičení 2.4.23. V prostoru $X = \mathbb{R}^2$ s eukleidovskou metrikou uvažujme množiny

$$M_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x^2+y^2)^3 < (x^2-y^2)^2\},$$

$$M_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x^2+y^2)^3 = (x^2-y^2)^2\}.$$

Ukažte, že M_1 je otevřená a M_2 je uzavřená. Využijte větu 2.4.15 – pokuste se vyjádřit M_1 a M_2 jako vzor otevřené/uzavřené množiny pro vhodné spojité zobrazení $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Dále ukažte, že množina

$$M_3 = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{y}{\sin(x^2y^3)} > 2 \right\}$$

je otevřená. Využijte skutečnost, že sjednocení/průnik dvou otevřených množin je otevřená množina.

Cvičení 2.4.24. Rozhodněte, zda množina všech reálných posloupností, které jsou s výjimkou konečně mnoha členů nulové, je uzavřená podmnožina prostoru ℓ^∞. Použijte důsledek 2.4.9.

2.5 Úplné metrické prostory

2.5.1 Úplné prostory a jejich vlastnosti

Posloupnost reálných čísel je konvergentní, právě když je cauchyovská. Toto kritérium je užitečné v situaci, kdy chceme dokázat existenci limity, ale neznáme její hodnotu.

V části 2.4 jsme definovali konvergentní a cauchyovské posloupnosti v metrickém prostoru. V tomto obecném kontextu stále platí, že každá konvergentní posloupnost je cauchyovská. Existují však metrické prostory, kde cauchyovská posloupnost nemusí mít limitu. Tím je motivována následující definice.

Definice 2.5.1. Metrický prostor X se nazývá *úplný*, pokud každá cauchyovská posloupnost prvků z X má limitu v X.

Úplný normovaný lineární prostor se zkráceně nazývá *Banachův prostor*, úplný prostor se skalárním součinem se zkráceně nazývá *Hilbertův prostor*.

S úplnými prostory jsme se setkali již v části 1.5 při studiu Fourierových řad; definice 1.5.6 představuje speciální případ předchozí definice.

V definici 1.5.4 jsme zavedli součet nekonečné řady prvků v prostoru se skalárním součinem, je ovšem jasné, že stejnou definici lze použít v každém normovaném lineárním prostoru. Pokud je navíc prostor X úplný, pak nutná a postačující podmínka pro konvergenci řady je cauchyovskost částečných součtů. S její pomocí lze dokázat např. analogii známého tvrzení z reálné analýzy o absolutní konvergenci: Pokud $\sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\|$ konverguje, pak $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ konverguje. Důkaz je stejný jako v reálném případě.[4]

Uveďme několik příkladů úplných a neúplných prostorů:

- $\mathbb{R}$ s eukleidovskou metrikou je úplný.
- $(0,1)$ s eukleidovskou metrikou není úplný. Např. posloupnost $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ je cauchyovská (protože jde o konvergentní posloupnost reálných čísel), ale nemá limitu v $(0,1)$.
- $\mathbb{Q}$ s eukleidovskou metrikou není úplný. Např. posloupnost $\{(1+\frac{1}{n})^n\}_{n=1}^{\infty}$ je cauchyovská (protože jde o konvergentní posloupnost reálných čísel), ale nemá limitu v $\mathbb{Q}$ (Eulerovo číslo je iracionální).
- $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ s eukleidovskou metrikou není úplný. Např. posloupnost $\{\frac{\sqrt{2}}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ je cauchyovská (protože jde o konvergentní posloupnost reálných čísel), ale nemá limitu v $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
- Pro každé $p \in [1,\infty)$ je prostor $L^p(X,\mu)$ úplný, tj. Banachův prostor – viz přednášku Matematická analýza V. Pro $p=2$ dostáváme Hilbertův prostor $L^2(X,\mu)$. Je-li $X=\mathbb{N}$ a μ je aritmetická míra, pak $L^p(X,\mu)$ se redukuje na prostor posloupností ℓ^p, který je tím pádem úplný.
- Diskrétní metrický prostor na libovolné množině X je úplný. Jak vypadají cauchyovské posloupnosti? Volíme-li v definici $\varepsilon < 1$, vidíme, že každá cauchyovská posloupnost musí být od jistého indexu konstantní, tudíž je konvergentní.

Druhý, třetí a čtvrtý z výše uvedených příkladů představují speciální případy následující věty, neboť jde o podprostory úplného metrického prostoru $\mathbb{R}$.

Věta 2.5.2. *Nechť X je úplný metrický prostor a $Y \subset X$. Pak Y je úplný metrický prostor, právě když Y je uzavřená v X.*

Důkaz. Nechť Y je uzavřená v X a $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ je cauchyovská posloupnost v Y. Protože jde rovněž o cauchyovskou posloupnost v úplném prostoru X, musí mít limitu v X. Jelikož Y je uzavřená, musí tato limita ležet v Y (viz důsledek 2.4.9).

Nechť Y je úplný metrický prostor. Podle věty 2.3.5 (iii) stačí ukázat, že $\overline{Y} = Y$. Ukážeme, že $\overline{Y} \subset Y$ (opačná inkluze je zřejmá). Pokud $y \in \overline{Y}$, pak existuje posloupnost bodů $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ z Y, která konverguje k y (viz větu 2.4.8). Tato posloupnost je nutně cauchyovská. Protože Y je úplný prostor, musí limita y ležet v Y. □

Zastavme se ještě u dvou důležitých příkladů úplných prostorů.

Příklad 2.5.3. Pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a $p \in [1,\infty)$ je n-rozměrný vektorový prostor ℓ_n^p úplný. Jedná se totiž o speciální případ úplného prostoru $L^p(X,\mu)$, kde $X=\{1,\dots,n\}$ a μ je aritmetická míra.

Je však možné postupovat mnohem elementárněji a zahrnout i případ $p=\infty$: Nechť $\{x^k\}_{k=1}^{\infty}$ je cauchyovská posloupnost bodů v ℓ_n^p. Pro jejich i-té složky, kde $i \in \{1,\dots,n\}$, platí nerovnost

$$|x_i^k - x_i^l| \le \|x^k - x^l\|_p, \quad k,l \in \mathbb{N},$$

ze které plyne, že $\{x_i^k\}_{k=1}^{\infty}$ je cauchyovská posloupnost reálných čísel. Protože $\mathbb{R}$ je úplný prostor, existuje $\lim_{k\to\infty} x_i^k$; označme ji x_i a položme $x=(x_1,\dots,x_n)$. Ukázali jsme, že posloupnost bodů $\{x^k\}_{k=1}^{\infty}$ konverguje po složkách k bodu x. Podle věty 2.4.4 to znamená, že $\lim_{k\to\infty} x^k = x$ vzhledem k metrice v prostoru ℓ_n^p.

[4]Viz např. `https://en.wikipedia.org/wiki/Absolute_convergence#Proof_that_any_absolutely_convergent_series_in_a_Banach_space_is_convergent`.

Příklad 2.5.4. Prostor spojitých funkcí $C([a,b])$ se suprémovou normou je úplný.

Nechť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je cauchyovská posloupnost funkcí v $C([a,b])$. Pro každé $x \in [a,b]$ platí nerovnost

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_{\infty}, \quad n, m \in \mathbb{N},$$

ze které plyne, že posloupnost funkčních hodnot $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ je rovněž cauchyovská. Protože $\mathbb{R}$ je úplný prostor, existuje $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$; označme ji $f(x)$. Ukázali jsme, že posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ bodově konverguje k funkci f. Potřebujeme ještě ověřit, že $f \in C([a,b])$, a dokázat konvergenci posloupnosti vzhledem k metrice v prostoru $C([a,b])$, která je podle věty 2.4.7 ekvivalentní se stejnoměrnou konvergencí.

Z cauchyovskosti plyne, že pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pokud $m, n \geq n_0$, pak $\|f_n - f_m\|_{\infty} < \varepsilon$. To znamená, že pro každé $x \in [a,b]$ platí $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$. Limitním přechodem $m \to \infty$ získáme $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ pro každé $x \in [a,b]$ a $n \geq n_0$, čímž je dokázána stejnoměrná konvergence $f_n \rightrightarrows f$. Spojitost f na $[a,b]$ vyplývá ze skutečnosti, že jde o stejnoměrnou limitu posloupnosti spojitých funkcí.

Následující lemma nesouvisí s úplnými metrickými prostory, potřebujeme je pouze k důkazu další věty.

Lemma 2.5.5. *Je-li M neprázdná podmnožina metrického prostoru X, pak* $\operatorname{diam} \overline{M} = \operatorname{diam} M$.

Důkaz. Stačí dokázat $\operatorname{diam} \overline{M} \leq \operatorname{diam} M$, obrácená nerovnost je zřejmá. Volme libovolně $x, y \in \overline{M}$. Podle věty 2.4.8 existují posloupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ tvořené body z M takové, že $x_n \to x$, $y_n \to y$. Z definice průměru množiny plyne

$$d(x_n, y_n) \leq \operatorname{diam} M, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Z trojúhelníkové nerovnosti dostaneme

$$d(x,y) \leq d(x,x_n) + d(x_n,y_n) + d(y_n,y) \leq d(x,x_n) + \operatorname{diam} M + d(y_n,y).$$

Limitním přechodem pro $n \to \infty$ pak získáme nerovnost $d(x,y) \leq \operatorname{diam} M$. Protože x, y byly libovolné prvky $\overline{M}$, dokázali jsme nerovnost $\operatorname{diam} \overline{M} \leq \operatorname{diam} M$. □

Z reálné analýzy je dobře znám tzv. princip vložených intervalů: Máme-li posloupnost omezených uzavřených intervalů $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \cdots$, pak jejich průnik je neprázdný. Pokud navíc délky intervalů konvergují k nule, pak jejich průnik obsahuje právě jeden bod. Následující věta ukazuje, že podobné tvrzení platí v každém úplném metrickém prostoru (a naopak v neúplném prostoru neplatí).

Věta 2.5.6 (Cantorova věta)**.** *Následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) X je úplný metrický prostor.

(ii) Pro každou nerostoucí posloupnost[5] neprázdných uzavřených množin $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$ v X takových, že $\operatorname{diam} M_n \to 0$, *je průnik $\bigcap_{n=1}^{\infty} M_n$ jednobodová množina.*

Důkaz. Pro důkaz (i)⇒(ii) volme $x_n \in M_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Dokážeme, že $\bigcap_{n=1}^{\infty} M_n = \{x\}$, kde x je limita posloupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Ukažme nejprve, že limita existuje. Volme libovolné $\varepsilon > 0$. Podle předpokladu existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\operatorname{diam} M_{n_0} < \varepsilon$. Víme, že pro $n \geq n_0$ platí $M_n \subset M_{n_0}$. To znamená, že pro všechna $m, n \geq n_0$ platí

$$d(x_n, x_m) \leq \operatorname{diam} M_{n_0} < \varepsilon.$$

Tedy $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je cauchyovská a díky úplnosti X má limitu $x \in X$.

Ukažme, že $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} M_n$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ a každé $i \geq n$ platí $x_i \in M_i \subset M_n$, tj. počínaje n-tým členem leží prvky $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ v M_n. Jelikož M_n je uzavřená, je též limita x prvkem M_n. Protože $n \in \mathbb{N}$ bylo libovolné, platí $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} M_n$.

[5] Posloupnost množin je nerostoucí, pokud $M_1 \supset M_2 \supset M_3 \supset \cdots$.

Zbývá dokázat, že $\bigcap_{n=1}^{\infty} M_n$ neobsahuje žádný jiný prvek kromě x. Nechť $y \in \bigcap_{n=1}^{\infty} M_n$. Pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $x, y \in M_n$, tedy

$$d(x,y) \leq \operatorname{diam} M_n.$$

Limitním přechodem $n \to \infty$ získáme $d(x,y) \leq 0$, což nastává jen tehdy, když $x = y$.

Pro důkaz (ii)⇒(i) předpokládejme, že $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je cauchyovská, a ukažme, že má limitu. Položme

$$M_n = \overline{\{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots\}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Platí $M_1 \supset M_2 \supset M_3 \supset \cdots$, každá množina M_n je uzavřená a neprázdná. Ukažme, že $\operatorname{diam} M_n \to 0$. Pro libovolné $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}_0$ takové, že pro všechna $m, n \geq n_0$ platí $d(x_m, x_n) < \varepsilon$. Z definice průměru množiny pak plyne

$$\operatorname{diam} \{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots\} \leq \varepsilon, \quad n \geq n_0.$$

Podle lemmatu 2.5.5 platí

$$\operatorname{diam} M_n = \operatorname{diam} \overline{\{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots\}} = \operatorname{diam} \{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots\} \leq \varepsilon, \quad n \geq n_0,$$

čímž je dokázáno $\operatorname{diam} M_n \to 0$.

Podle předpokladu existuje $x \in X$ takové, že $\bigcap_{n=1}^{\infty} M_n = \{x\}$. Tvrdíme, že $x_n \to x$. Skutečně, pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\operatorname{diam} M_{n_0} < \varepsilon$. Jelikož pro $n \geq n_0$ máme $x_n, x \in M_{n_0}$, platí $d(x_n, x) < \varepsilon$. □

2.5.2 Banachova věta o pevném bodu

Definice 2.5.7. Bod $x \in X$ se nazývá *pevným bodem* zobrazení $f : X \to X$, pokud $f(x) = x$.

Mnoho úloh v matematice, jako např. řešení nejrůznějších rovnic, lze převést na hledání pevného bodu (později uvedeme některé příklady). Nejznámější větou, která udává postačující podmínku pro existenci a jednoznačnost pevného bodu, je Banachova věta.[6] Navíc poskytuje i návod, jak pevný bod najít.

Věta 2.5.8 (Banachova věta)**.** *Je-li X úplný metrický prostor a zobrazení $f : X \to X$ je kontrakce, pak má právě jeden pevný bod $x \in X$. Volíme-li $x_0 \in X$ libovolně a pro každé $n \in \mathbb{N}$ položíme $x_n = f(x_{n-1})$, pak $x_n \to x$.*

Důkaz. Podle definice kontrakce existuje číslo $K \in [0,1)$ takové, že

$$d(f(x), f(y)) \leq K d(x,y), \quad x, y \in X.$$

Volme $x_0 \in X$ libovolně a pro každé $n \in \mathbb{N}$ položme $x_n = f(x_{n-1})$. Ukážeme, že tato rekurentně zadaná posloupnost má limitu. Pro vzdálenosti dvou po sobě jdoucích členů této posloupnosti platí

$$\begin{aligned}
d(x_1, x_2) &= d(f(x_0), f(x_1)) \leq K d(x_0, x_1), \\
d(x_2, x_3) &= d(f(x_1), f(x_2)) \leq K d(x_1, x_2) \leq K^2 d(x_0, x_1), \\
d(x_3, x_4) &= d(f(x_2), f(x_3)) \leq K d(x_2, x_3) \leq K^3 d(x_0, x_1), \\
&\dots \\
d(x_i, x_{i+1}) &= d(f(x_{i-1}), f(x_i)) \leq K d(x_{i-1}, x_i) \leq K^i d(x_0, x_1), \\
&\dots
\end{aligned}$$

K odhadnutí vzdálenosti dvou členů x_m a x_n, které nemusejí jít bezprostředně po sobě, použijeme trojúhelníkovou nerovnost. Pokud $m > n$, pak

$$\begin{aligned}
d(x_n, x_m) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots + d(x_{m-1}, x_m) \leq \\
&\leq K^n d(x_0, x_1) + K^{n+1} d(x_0, x_1) + \cdots + K^{m-1} d(x_0, x_1) = \\
&= K^n d(x_0, x_1)(1 + K + \cdots + K^{m-n-1}) = K^n d(x_0, x_1) \frac{1 - K^{m-n}}{1 - K} \leq K^n d(x_0, x_1) \frac{1}{1-K}.
\end{aligned}$$

[6] Stefan Banach (1892–1945) byl polský matematik.

Výraz na pravé straně má pro $n \to \infty$ limitu 0, z čehož vyplývá, že $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je cauchyovská posloupnost. Má tedy limitu $x \in X$. Dále platí

$$x = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x),$$

kde poslední rovnost plyne ze spojitosti f. Ukázali jsme, že x je pevným bodem f. Pokud by existoval další pevný bod $y \neq x$, platilo by $d(x,y) = d(f(x), f(y)) \leq Kd(x,y) < d(x,y)$, což je spor. □

Chceme-li použít Banachovu větu, musíme kromě úplnosti X ověřit, že dané zobrazení f je kontrakce. Většinou nezbývá, než postupovat podle definice. V případě, kdy f je diferencovatelná reálná funkce jedné reálné proměnné, lze použít následující jednoduché kritérium, které využijeme v části 2.5.3.

Věta 2.5.9. *Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je interval a $f : I \to \mathbb{R}$ diferencovatelná funkce. Označíme-li $K = \sup_{x\in I} |f'(x)|$, pak platí:*

(i) f je lipschitzovské zobrazení $\iff K < \infty$.

(ii) f je kontrakce $\iff K < 1$.

Důkaz. Pro každé dva různé body $x, y \in I$ platí podle Lagrangeovy věty o střední hodnotě rovnost $f(x) - f(y) = f'(\xi)(x - y)$, kde $\xi \in I$ je bod ležící mezi x, y. Tedy

$$|f(x) - f(y)| = |f'(\xi)| \cdot |x - y| \leq K|x - y|,$$

odkud plynou obě implikace zprava doleva.

K důkazu obrácených implikací volme libovolné $L < K$. Podle definice supréma existuje $x \in I$ takové, že $|f'(x)| > L$. Z definice derivace pak vyplývá, že najdeme bod $y \in I$ různý od x takový, že

$$\left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| > L,$$

neboli $|f(x) - f(y)| > L|x - y|$. Pokud $K = \infty$, můžeme L volit libovolně velké a vidíme, že f není lipschitzovské zobrazení. Pokud $K \geq 1$, můžeme L volit libovolně blízko 1 a vidíme, že f není kontrakce. □

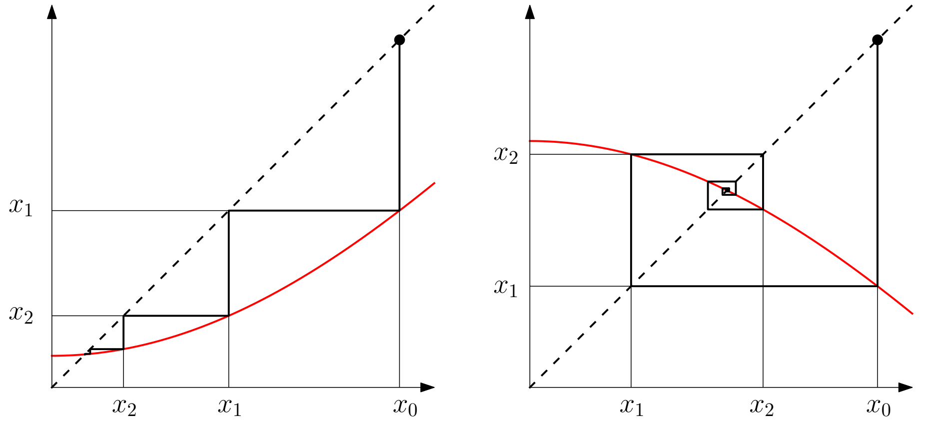
V případě reálné funkce f se dá hledání pevného bodu metodou popsanou v Banachově větě znázornit graficky, viz obr. 2.4. Pevný bod je průsečík grafu funkce f s přímkou $y = x$ (čárkovaně). Na ose x volíme libovolnou hodnotu x_0 a najdeme příslušnou funkční hodnotu $x_1 = f(x_0)$. S pomocí čárkované čáry přeneseme hodnotu x_1 z osy y na osu x a analogicky pokračujeme dále. Ekvivalentně lze postupovat tak, že konstruujeme lomenou čáru, kde se střídají svislé úsečky mířící ke grafu funkce s vodorovnými úsečkami mířícími k přímce $y = x$. Pokud jsou splněny předpoklady Banachovy věty, pak posloupnost $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ konverguje k pevnému bodu f. Obrázek ukazuje, že pokud je f v okolí pevného bodu rostoucí (vlevo), pak se k pevnému bodu přibližujeme z jedné strany a lomená čára připomíná schodiště. Pokud je f klesající (vpravo), pak se k pevnému bodu přibližujeme střídavě z obou stran a lomená čára připomíná spirálu.

V následujícím textu si ukážeme dva klasické příklady použití Banachovy věty.

2.5.3 Přibližný výpočet odmocniny

Předpokládejme, že je dáno reálné číslo $a > 0$ a chceme vypočítat přibližnou hodnotu $\sqrt{a}$. Následující postup využívající pouze sčítání a dělení byl znám již ve starověké Mezopotámii:

- Zvolíme libovolné číslo $x_0 > 0$.
- Pro každé $n \in \mathbb{N}$ položíme
$$x_n = \frac{1}{2}\left(x_{n-1} + \frac{a}{x_{n-1}}\right).$$



Obrázek 2.4: Iterace x_0, $x_1 = f(x_0)$, $x_2 = f(x_1)$, … konvergují k pevnému bodu f

Čísla x_0, x_1, x_2, … představují stále lepší aproximace $\sqrt{a}$. Intuitivní vysvětlení je následující: Pokud $x_{n-1} < \sqrt{a}$, pak $a/x_{n-1} > \sqrt{a}$. Pokud naopak $x_{n-1} > \sqrt{a}$, pak $a/x_{n-1} < \sqrt{a}$. V obou případech tedy další člen x_n vzniká tak, že průměrujeme číslo menší než $\sqrt{a}$ s číslem větším než $\sqrt{a}$.

Zkusme pro ilustraci počítat např. $\sqrt{2}$, přičemž vezmeme nepříliš přesný počáteční odhad $x_0 = 2$. Pak dostáváme následující hodnoty (vypisujeme prvních 50 cifer):

$$
\begin{aligned}
x_0 &= 2{,}0000000000000000000000000000000000000000000000000\\
x_1 &= 1{,}5000000000000000000000000000000000000000000000000\\
x_2 &= 1{,}4166666666666666666666666666666666666666666666667\\
x_3 &= 1{,}4142156862745098039215686274509803921568627450980\\
x_4 &= 1{,}4142135623746899106262955788901349101165596221157\\
x_5 &= 1{,}4142135623730950488016896235025302436149819257762\\
x_6 &= 1{,}4142135623730950488016887242096980785696718753772
\end{aligned}
$$

Porovnáním se skutečnou hodnotou

$$\sqrt{2} = 1{,}4142135623730950488016887242096980785696718753769$$

vidíme, že x_6 se shoduje s $\sqrt{2}$ na 48 platných cifer, algoritmus je tedy velmi efektivní.

Pokusme se zdůvodnit správnost algoritmu, tj. dokázat, že $\lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt{a}$. Členy posloupnosti počítáme stejně jako v Banachově větě pomocí rekurentního vzorce

$$x_n = f(x_{n-1}), \quad n \in \mathbb{N},$$

kde

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right).$$

Z nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem plyne, že pokud $x > 0$, pak

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right) \geq \sqrt{x \cdot \frac{a}{x}} = \sqrt{a}.$$

To znamená, že všechny členy posloupnosti s výjimkou nultého, který jsme volili libovolně, leží v intervalu $[\sqrt{a}, \infty)$. Nultý člen si můžeme odmyslet, neboť neovlivní existenci ani hodnotu $\lim_{n\to\infty} x_n$. Omezíme se tedy na metrický prostor $X = [\sqrt{a}, \infty)$, který je podle věty 2.5.2 úplný. Z věty 2.5.9 plyne, že zobrazení

$f : X \to X$ je kontrakce, neboť

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{a}{x^2}\right),$$
$$|f'(x)| \le \frac{1}{2}, \quad x \in [\sqrt{a}, \infty).$$

Tím jsme ověřili předpoklady Banachovy věty, ze které plyne, že posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje k jedinému pevnému bodu zobrazení f. Abychom našli hodnotu pevného bodu, řešíme rovnici $x = f(x)$ za předpokladu $x \in [\sqrt{a}, \infty)$:

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right) \\ 2x &= x + \frac{a}{x} \\ x &= \frac{a}{x} \\ x^2 &= a \\ x &= \sqrt{a} \end{aligned}$$

Vidíme, že f má na intervalu $[\sqrt{a}, \infty)$ pevný bod $x = \sqrt{a}$, který je limitou posloupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.

2.5.4 Diferenciální rovnice – Picardova věta

Klasickým příkladem použití Banachovy věty je odvození Picardovy věty – základní věty o existenci a jednoznačnosti řešení diferenciální rovnice s počáteční podmínkou

$$x'(t) = f(t, x(t)), \quad x(t_0) = x_0. \tag{2.5.1}$$

Picardova věta[7] říká, že pokud je f definována v okolí bodu (t_0, x_0), je zde spojitá a lipschitzovská vzhledem ke druhé proměnné,[8] pak má úloha právě jedno řešení definované na okolí bodu t_0. Jde tedy o lokální výsledek – globální existenci řešení např. na celé reálné ose nelze obecně očekávat, neboť řešení může v konečném čase utéct do nekonečna („blow up“). Následující formulace věty udává informaci o délce intervalu $[t_0 - c, t_0 + c]$, na kterém je zaručena existence a jednoznačnost řešení.

Pro zjednodušení zápisu se omezíme na skalární rovnici, přestože věta platí i pro vektorové rovnice (tj. soustavy rovnic); čtenář si může samostatně promyslet, jak se v tomto případě změní důkaz.

Věta 2.5.10 (Picardova věta)**.** *Předpokládejme, že $t_0, x_0 \in \mathbb{R}$, $a, b > 0$, $f : [t_0-a, t_0+a]\times[x_0-b, x_0+b] \to \mathbb{R}$ je spojitá a existuje $L > 0$ takové, že pro všechna $t \in [t_0 - a, t_0 + a]$ a $x, y \in [x_0 - b, x_0 + b]$ platí*

$$|f(t, x) - f(t, y)| \le L|x - y|. \tag{2.5.2}$$

Označme $M = \sup\{|f(t, x)| : t \in [t_0-a, t_0+a], x \in [x_0-b, x_0+b]\}$. Pak pro každé $c \in (0, \min(a, b/M, 1/L))$ má úloha (2.5.1) právě jedno řešení na intervalu $[t_0 - c, t_0 + c]$.

Důkaz. Pokud x je řešením úlohy (2.5.1) na intervalu $[t_0 - c, t_0 + c]$, pak integrováním $x'(s) = f(s, x(s))$ od t_0 do t a využitím toho, že $\int_{t_0}^{t} x'(s)\,\mathrm{d}s = x(t) - x(t_0) = x(t) - x_0$, získáme

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\,\mathrm{d}s, \quad t \in [t_0 - c, t_0 + c]. \tag{2.5.3}$$

Obráceně, z (2.5.3) plyne (2.5.1): Platnost vztahu $x(t_0) = x_0$ je zřejmá a derivováním (2.5.3) podle t získáme $x'(t) = f(t, x(t))$. Dále tedy budeme hledat řešení integrální rovnice (2.5.3), která je ekvivalentní s (2.5.1).

[7] Émile Picard (1856–1941) byl francouzský matematik.

[8] To nastává např. tehdy, když má v okolí (t_0, x_0) spojitou a tudíž omezenou parciální derivaci $\frac{\partial f}{\partial x}$, srov. s větou 2.5.9.

Řešení musí být spojitá funkce, jejíž graf neopustí obdélník, na kterém je definována funkce f. Musí tedy patřit do množiny funkcí

$$X = \{x \in C([t_0 - c, t_0 + c]) : \forall t \in [t_0 - c, t_0 + c] \ \ |x(t) - x_0| \le b\}.$$

Na X se budeme dívat jako na metrický prostor se suprémovou normou. Můžeme si všimnout, že jde vlastně o uzavřenou kouli $K_b(x_0)$ v prostoru $C([t_0 - c, t_0 + c])$. Podle věty 2.5.2 a příkladu 2.5.4 se tudíž jedná o úplný metrický prostor. Řešení rovnice (2.5.3) nyní převedeme na hledání pevného bodu. Pro každou funkci $x \in X$ definujme funkci $F(x)$ předpisem

$$F(x)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\,\mathrm{d}s, \quad t \in [t_0 - c, t_0 + c].$$

F je tedy zobrazení, které funkcím přiřazuje funkce. Rovnice (2.5.3) je splněna, právě když $x(t) = F(x)(t)$ pro všechna $t \in [t_0 - c, t_0 + c]$, což nastává, právě když $x = F(x)$.

K dokončení důkazu stačí ověřit, že F splňuje předpoklady Banachovy věty. Z definice konstanty M a z požadavku $c < b/M$ vyplývá, že

$$|F(x)(t) - x_0| \le \int_{t_0}^{t} |f(s, x(s))|\,\mathrm{d}s \le M|t - t_0| \le Mc < b, \quad t \in [t_0 - c, t_0 + c].$$

Vidíme, že F je zobrazení z X do X. Dále s využitím podmínky (2.5.2) pro $x, y \in X$ platí

$$\begin{aligned} |F(x)(t) - F(y)(t)| &= \left| \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\,\mathrm{d}s - \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))\,\mathrm{d}s \right| \le \int_{t_0}^{t} |f(s, x(s)) - f(s, y(s))|\,\mathrm{d}s \le \\ &\le \int_{t_0}^{t} L \cdot |x(s) - y(s)|\,\mathrm{d}s \le L \cdot |t - t_0| \cdot \|x - y\|_\infty \le Lc \cdot \|x - y\|_\infty, \quad t \in [t_0 - c, t_0 + c], \end{aligned}$$

tudíž $\|F(x) - F(y)\|_\infty \le Lc \cdot \|x - y\|_\infty$. Protože $Lc < 1$, ukázali jsme, že F je kontrakce. □

Poznámka 2.5.11. Podle Banachovy věty můžeme pevný bod F najít jako limitu posloupnosti, jejíž nultý člen $y_0 \in X$ volíme libovolně a dále počítáme $y_n = F(y_{n-1})$, $n \in \mathbb{N}$. Zkusme tímto postupem pro ilustraci řešit rovnici $x'(t) = x(t)$, $x(0) = 1$. Pak $t_0 = 0$, $x_0 = 1$, $f(t, x) = x$ a zobrazení F je dáno předpisem

$$F(x)(t) = 1 + \int_0^t x(s)\,\mathrm{d}s.$$

Volíme-li např. $y_0(t) = 1$, $t \in \mathbb{R}$, pak ze vzorce $y_n = F(y_{n-1})$ dostáváme posloupnost

$$\begin{aligned} y_1(t) &= 1 + \int_0^t 1\,\mathrm{d}s = 1 + t, \\ y_2(t) &= 1 + \int_0^t (1 + s)\,\mathrm{d}s = 1 + t + \frac{t^2}{2}, \\ y_3(t) &= 1 + \int_0^t (1 + s + \frac{s^2}{2})\,\mathrm{d}s = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{2 \cdot 3}, \end{aligned}$$

atd. Není těžké uhodnout, že $y_n(t) = \sum_{i=0}^{n} \frac{t^i}{i!}$, a tudíž řešení diferenciální rovnice je $\lim_{n\to\infty} y_n(t) = \mathrm{e}^t$.

2.5.5 Cvičení

Cvičení 2.5.12. Ukažte, že pokud z Cantorovy věty 2.5.6 vynecháme předpoklad uzavřenosti M_n nebo předpoklad diam $M_n \to 0$, pak tvrzení neplatí a průnik $\bigcap_{n=1}^{\infty} M_n$ může být prázdný.

Cvičení 2.5.13. Dokažte, že prostor všech omezených posloupností ℓ^∞ se suprémovou normou je úplný. (Postupujte obdobně jako v příkladu 2.5.4).

Cvičení 2.5.14. Nechť X je prostor všech spojitých funkcí na intervalu $[0,1]$ s integrální normou

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f|.$$

Dokažte, že X není úplný – použijte větu 2.5.2 a ukažte, že X je podmnožina $L^1([0,1])$, která není uzavřená. (Najděte vhodnou posloupnost spojitých funkcí, která konverguje v $L^1([0,1])$ k limitě, která není spojitá.)

Cvičení 2.5.15. Uvažujme reálnou funkci f definovanou předpisem $f(x) = x + \frac{1}{x}$, $x \in [1,\infty)$. Rozhodněte, zda se jedná o lipschitzovské zobrazení, případně kontrakci. Má pevný bod?

Cvičení 2.5.16. Ukažte, že funkce $f : [\sqrt{2},\infty) \to [\sqrt{2},\infty)$ definovaná předpisem $f(x) = \sqrt{2+x}$ je kontrakce. Pomocí Banachovy věty o pevném bodu pak najděte limitu posloupnosti

$$\sqrt{2}, \quad \sqrt{2+\sqrt{2}}, \quad \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}, \quad \ldots$$

Cvičení 2.5.17. Na metrickém prostoru $X = C([a,b])$ uvažujme zobrazení $F : X \to X$ definované předpisem

$$F(f)(t) = \int_a^t f, \quad f \in X, \quad t \in [a,b].$$

Najděte všechny pevné body F. Ukažte, že F je kontrakce, právě když $b - a < 1$.

2.6 Husté a řídké množiny

Pojmy „hustá množina“ a „řídká množina“ představují jistou charakterizaci velkých a malých množin v metrických prostorech. Uvedeme jejich definice, vlastnosti a ilustrujeme je na příkladech.

2.6.1 Definice, věty a příklady

Definice 2.6.1. Množina $M \subset X$ se nazývá *hustá*, pokud $\overline{M} = X$.

Připomeňme, že $\overline{M}$ obsahuje právě všechny body z X, ke kterým lze dokonvergovat pomocí posloupností z M (viz větu 2.4.8). Ekvivalentně lze tedy říct, že $M \subset X$ je hustá, právě když pro každé $x \in X$ a každé $\varepsilon > 0$ existuje $y \in M$ splňující $d(x,y) < \varepsilon$. Vyjádřeno slovy, libovolně blízko k libovolnému bodu z X lze najít bod z M.

Uveďme jednoduché příklady:

- $\mathbb{Q}$ je hustá v $\mathbb{R}$.
- $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ je hustá v $\mathbb{R}$.
- $\mathbb{Q}^n$ je hustá v $\mathbb{R}^n$.
- Množina $\{\frac{m}{2^n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}_0\}$ je hustá v $\mathbb{R}$ i v $\mathbb{Q}$.
- V diskrétním metrickém prostoru je každá množina M uzavřená, tudíž $\overline{M} = M$ a jediná hustá množina je celý prostor X.

Příklad 2.6.2. V kapitole 1 při studiu Fourierových řad jsme používali následující dvě tvrzení:

- Pro každou $f \in L^p([a,b])$ a každé $\varepsilon > 0$ existuje spojitá funkce $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ splňující $\|f - g\|_p < \varepsilon$ (viz větu 1.6.2).

- Pro každou spojitou 2π-periodickou funkci f existuje trigonometrický polynom t takový, že $|f(x) - t(x)| < \varepsilon$ pro každé $x \in \mathbb{R}$ (viz větu 1.1.2).

První tvrzení vlastně znamená, že $C([a, b])$ je hustá podmnožina $L^p([a, b])$. Druhé tvrzení říká, že trigonometrické polynomy jsou husté v prostoru spojitých 2π-periodických funkcí se suprémovou normou.

Příklad 2.6.3. Nechť X je prostor posloupností ℓ^1. Uvažujme množinu $M \subset \ell^1$ tvořenou všemi posloupnostmi, které mají pouze konečný počet nenulových členů a tyto členy jsou racionální čísla. Ukážeme, že M je hustá.

Zvolme libovolně $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell^1$ a $\varepsilon > 0$. Potřebujeme dokázat, že existuje $y \in M$ splňující $\|x - y\|_1 < \varepsilon$.

Z definice prostoru ℓ^1 víme, že $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty$. Proto existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\sum_{n=n_0+1}^{\infty} |x_n| < \frac{\varepsilon}{2}$. Jelikož racionální čísla jsou hustá v $\mathbb{R}$, můžeme pro každé $n \in \{1, \ldots, n_0\}$ najít $q_n \in \mathbb{Q}$ splňující $|q_n - x_n| < \frac{\varepsilon}{2n_0}$. Položíme-li

$$y = (q_1, \ldots, q_{n_0}, 0, 0, \ldots) \in M,$$

pak platí

$$\|x - y\|_1 = \sum_{n=1}^{n_0} |x_n - q_n| + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} |x_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Definice 2.6.4. Množina $M \subset X$ se nazývá *řídká*, pokud $(\overline{M})^\circ = \emptyset$.

- V metrickém prostoru $\mathbb{R}$ je každá konečná množina řídká, nekonečná množina $\mathbb{Z}$ je rovněž řídká. Množina $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ představuje jednoduchý příklad ukazující, že řídká množina může mít hromadný bod.
- V diskrétním metrickém prostoru je každá množina M otevřená i uzavřená, tudíž $(\overline{M})^\circ = M$ a jediná řídká množina je prázdná množina.

Jaký je vztah mezi hustými a řídkými množinami? Je doplněk řídké množiny hustý a naopak? Odpověď dává následující věta.

Věta 2.6.5. *Platí následující tvrzení:*

(i) $M \subset X$ je řídká, právě když $X \setminus \overline{M}$ je hustá.

(ii) Je-li $M \subset X$ řídká, pak $X \setminus M$ je hustá.

(iii) Nechť $M \subset X$ je uzavřená. Pak M je řídká, právě když $X \setminus M$ je hustá.

Důkaz. První tvrzení plyne z následujících ekvivalencí: $M \subset X$ je řídká $\iff$ $\overline{M}$ nemá vnitřní body $\iff$ $X \setminus \overline{M}$ nemá vnější body $\iff$ $X \setminus \overline{M}$ je hustá.

Druhé tvrzení vyplývá z prvního: Pokud je $X \setminus \overline{M}$ hustá, pak $X \setminus M$ je také hustá, neboť $X \setminus \overline{M} \subset X \setminus M$.

Třetí tvrzení rovněž vyplývá z prvního, neboť pro uzavřenou množinu M platí $\overline{M} = M$. □

Řídké množiny se v angličtině nazývají „nowhere dense“. Následující věta, kterou lze považovat za ekvivalentní definici řídké množiny, vysvětluje, proč je tento název výstižný: Řídká množina M má tu vlastnost, že v každé kouli lze najít „díru“ neobsahující žádný bod z M. V důsledku to znamená, že řídká množina nemůže být hustá v žádné podmnožině X s neprázdným vnitřkem.

Věta 2.6.6. *Pro libovolnou množinu $M \subset X$ jsou následující tvrzení ekvivalentní:*

(i) M je řídká.

(ii) Každá neprázdná otevřená koule v X obsahuje neprázdnou otevřenou kouli disjunktní s M.

Důkaz. Pokud M je řídká, pak podle věty 2.6.5 je $X \setminus \overline{M}$ hustá, takže libovolná neprázdná koule $B_r(x)$ v X má neprázdný průnik s $X \setminus \overline{M}$. Tudíž $B_r(x)$ obsahuje bod $\tilde{x}$ nepatřící do $\overline{M}$. Protože $\overline{M}$ je uzavřená, musí být $\tilde{x}$ jejím vnějším bodem. Volíme-li dostatečně malé $\tilde{r} > 0$, pak $B_{\tilde{r}}(\tilde{x})$ je obsažena v $B_r(x)$ a je disjunktní s $\overline{M}$, tedy i s M.

Místo obrácené implikace dokážeme její obměnu. Pokud M není řídká, pak existuje bod $x \in (\overline{M})^\circ$. Jelikož $(\overline{M})^\circ$ je otevřená, existuje $r > 0$ takové, že $B_r(x) \subset (\overline{M})^\circ \subset \overline{M}$. To znamená, že libovolně blízko k libovolnému bodu z $B_r(x)$ existuje bod z M. Proto $B_r(x)$ nemůže obsahovat kouli disjunktní s M. □

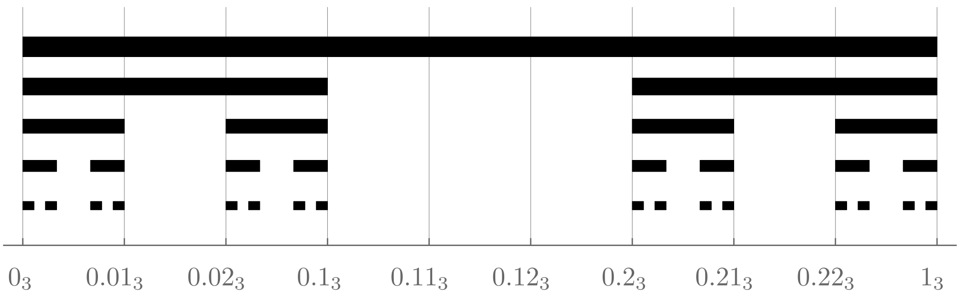
Jak se chovají husté a řídké množiny vzhledem ke sjednocením a průnikům? Z definic je zřejmé, že sjednocení hustých množin je hustá množina a průnik řídkých množin je řídká množina. Průnik hustých množin nemusí být hustý (může být dokonce prázdný, např. $\mathbb{Q} \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \emptyset$). Jediná zajímavá situace tedy nastává při sjednocování řídkých množin.

Věta 2.6.7. *Jsou-li $M_1, M_2 \subset X$ řídké, pak $M_1 \cup M_2$ je řídká.*

Důkaz. Ověříme, že $M_1 \cup M_2$ splňuje druhé tvrzení věty 2.6.6. Protože M_1 je řídká, libovolná neprázdná koule $B_r(x)$ v X obsahuje neprázdnou kouli $B_{r_1}(x_1)$ disjunktní s M_1. Protože M_2 je řídká, koule $B_{r_1}(x_1)$ obsahuje neprázdnou kouli $B_{r_2}(x_2)$ disjunktní s M_2. Je zřejmé, že $B_{r_2}(x_2)$ je obsažena v $B_r(x)$ a je disjunktní s $M_1 \cup M_2$. □

Z předchozí věty ihned plyne, že sjednocení konečného počtu řídkých množin je řídká množina. Spočetné sjednocení řídkých množin však již nemusí být řídká množina. Na druhou stranu ovšem platí, že úplný metrický prostor nemůže být spočetným sjednocením řídkých množin – jde o tzv. Baireovu větu, jedno z důležitých tvrzení moderní matematické analýzy.[9]

Příklad 2.6.8. Pěkným netriviálním příkladem řídké množiny na reálné ose je tzv. Cantorovo diskontinuum. Začneme tím, že položíme $C_0 = [0, 1]$. Další krok je induktivní: Máme-li množinu C_{n-1}, pak C_n vznikne odebráním otevřených prostředních třetin intervalů nacházejících se v C_{n-1}. Postupně tedy konstruujeme nekonečnou posloupnost množin $C_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$, $C_2 = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1]$, atd., viz obr. 2.5. Cantorovo diskontinuum pak sestává z bodů intervalu $[0, 1]$, které nejsou odebrány v žádném kroku tohoto procesu, tj. jde o množinu $C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$.



Obrázek 2.5: Množiny C_0 až C_4 (shora dolů) z definice Cantorova diskontinua; čísla udávající hranice intervalů jsou zapsána v trojkové soustavě

Můžeme ji popsat ještě jiným ekvivalentním způsobem: C obsahuje právě všechna reálná čísla z $[0, 1]$, která lze v trojkové soustavě zapsat bez použití jedničky. Skutečně, C_1 vzniká z C_0 tak, že vynecháváme všechna čísla, která mají v trojkové soustavě na prvním místě za desetinnou čárkou jedničku. (Číslo $\frac{1}{3}$ má sice v trojkové soustavě zápis 0,1, ale také $0{,}0\overline{2}$, tj. lze je vyjádřit bez použití jedničky). Podobně C_2 vzniká z C_1 odebráním všech čísel, která mají jedničku na druhém místě za desetinnou čárkou, atd.

Všimneme si některých vlastností množiny C:

- C je uzavřená, neboť je průnikem uzavřených množin.

[9] Viz např. I. Netuka: *Základy moderní analýzy*, Matfyzpress, 2014, sekce 3.10 a 3.20.

- C je nespočetná: Libovolné číslo z intervalu $[0,1)$ můžeme zapsat ve dvojkové soustavě, následně všechny jedničky nahradit dvojkami a výsledek interpretovat jako trojkový zápis čísla z C. Tento proces odpovídá prostému zobrazení nespočetné množiny $[0,1)$ do C, která je tedy rovněž nespočetná.

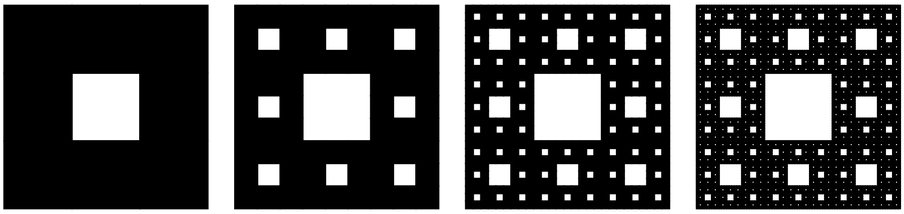
- C je řídká: Podle třetí části věty 2.6.5 stačí ukázat, že $[0,1] \setminus C$ je hustá v $[0,1]$. To je pravda, neboť libovolně blízko k libovolnému číslu z $[0,1]$ existuje číslo, které nelze v trojkové soustavě zapsat bez použití jedničky (stačí vzít dané číslo a dostatečně daleko za desetinnou čárkou změnit všechny cifry na jedničky).

- C má nulovou Lebesgueovu míru. Míra intervalů, které postupně odstraňujeme z $[0,1]$, je totiž

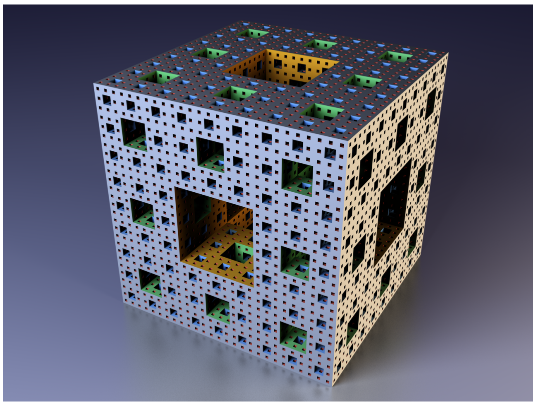
$$1 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{9} + 4 \cdot \frac{1}{27} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \frac{1}{3^{n+1}} = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{1}{3} \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = 1.$$

Vidíme, že Cantorovo diskontinuum je z pohledu teorie množin velkou množinou, avšak z pohledu metrických prostorů i teorie míry jde o množinu malou.

Podobným způsobem jako Cantorovo diskontinuum na přímce vznikají i další zajímavé objekty, jako je např. Sierpińského koberec v rovině (obr. 2.6) a Mengerova houba v prostoru (obr. 2.7). Opět jde o uzavřené nespočetné řídké množiny nulové míry, navíc to jsou jednoduché populární příklady fraktálů.



Obrázek 2.6: Konstrukce Sierpińského koberce: Začínáme se čtvercem $[0,1] \times [0,1]$. Rozdělíme jej na 3×3 menší čtverce, prostřední odebereme. Se zbývajícími čtverci pak opakujeme stejnou operaci. Viz též https://en.wikipedia.org/wiki/Sierpinski_carpet



Obrázek 2.7: Mengerova houba je trojrozměrnou variantou Sierpińského koberce. Obrázek převzat z Wikimedia Commons, https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Menger-Schwamm-farbig.png. Viz též https://en.wikipedia.org/wiki/Menger_sponge

Závěrem poznamenejme, že existují i řídké množiny, které mají kladnou Lebesgueovu míru. Dají se získat drobnou modifikací algoritmu pro konstrukci Cantorova diskontinua, viz např. https://en.wikipedia.org/wiki/Smith-Volterra-Cantor_set.

2.6.2 Cvičení

Cvičení 2.6.9. Najděte příklad množiny M, pro kterou $(\overline{M})^\circ \neq M^\circ$.

Cvičení 2.6.10. Ukažte, že doplněk husté množiny nemusí být řídký; může být hustý?

Cvičení 2.6.11. Ukažte, že spočetné sjednocení řídkých množin může být hustá množina.

Cvičení 2.6.12. Ukažte, že množina M z příkladu 2.6.3 je hustá nejen v ℓ^1, ale v ℓ^p pro každé $p \in [1, \infty)$. Je hustá v ℓ^∞?

Kapitola 3

Výsledky cvičení

1.3.4 Fourierova řada má tvar
$$F(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos(nx)$$
a platí $F(x) = f(x)$ pro $x \in [-\pi, \pi]$. Volbou $x = 0$, resp. $x = \pi$, získáme
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}, \quad \text{resp.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

1.3.5 Fourierova řada má tvar
$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi n}(1 - (-1)^n) \sin(nx) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{\pi(2k+1)} \sin(2k+1)x$$
a platí $F(x) = f(x)$ pro $x \in (-\pi, \pi)$, $F(\pm\pi) = 0$.

1.3.8 Fourierova řada má tvar
$$F(x) = \frac{\mathrm{e}^{\pi} - 1}{2\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi(n^2+1)} \left(((-1)^n \mathrm{e}^{\pi} - 1) \cos(nx) + ((-1)^{n+1} \mathrm{e}^{\pi} + 1) n \sin(nx) \right).$$

1.4.3 Úplné řešení lze najít na webu `https://math.stackexchange.com/questions/1728014/ces%c3%a0ro-sum-of-the-series-sin-x-sin-2x-sin-3x-ldots-frac12-cot`.

1.7.3 Z Parsevalovy rovnosti plyne
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

1.7.4 Z Parsevalovy rovnosti plyne
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

1.8.2 Fourierova řada má tvar
$$F(x) = \frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi} \frac{(-1)^{n+1}}{4n^2 - 1} \cos(2nx)$$
a platí $F(x) = f(x)$ pro $x \in [-\pi/2, \pi/2]$. Z Parsevalovy rovnosti plyne
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n^2-1)^2} = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2}.$$

1.8.3 Fourierova řada má tvar

$$F(x) = 2\pi + \cos x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-4}{n} \sin\left(\frac{nx}{2}\right)$$

a platí $F(x) = f(x)$ pro $x \in (0, 4\pi)$, $F(0) = F(4\pi) = 1 + 2\pi$.

2.1.12 $p \in (1, \infty)$.

2.1.13 $p \in [1, 2)$.

2.1.14 $p \in (1, \infty]$. Je prvkem c a c_0.

2.1.15 Například $\{\frac{1}{n^{1/q}}\}_{n=1}^{\infty}$.

2.1.16 Zvolme např. $x = (1, 0, \dots)$ a $y = (0, 1, \dots)$, tj. první dva vektory kanonické báze. Pak pro $p \in (0, 1)$

$$\|x + y\|_p = 2^{\frac{1}{p}} > 2 = \|x\|_p + \|y\|_p,$$

tj. neplatí trojúhelníková nerovnost.

2.1.17 Pro důkaz rovnoběžníkového pravidla stačí roznásobit $(x+y)\cdot(x+y)+(x-y)\cdot(x-y)$. V $\mathbb{R}^2$ pravidlo říká, že součet obsahů čtverců nad stranami rovnoběžníku je roven součtu obsahů čtverců nad úhlopříčkami. K nalezení protipříkladu pro $p \in [1, \infty) \setminus \{2\}$ stačí opět volit vektory kanonické báze, $x = (1, 0, \dots)$ a $y = (0, 1, \dots)$. Pak vyjde

$$\|x + y\|_p^2 + \|x - y\|_p^2 = 2^{\frac{2}{p}+1} \neq 4 = 2(\|x\|_p^2 + \|y\|_p^2).$$

2.2.21 Například $\bigcap_{n=1}^{\infty}(-1/n, 1/n) = \{0\}$.

2.2.22 Například $\bigcup_{n=1}^{\infty}[1/n, 1] = (0, 1]$.

2.2.23 Například $X = \mathbb{R}^2$ s eukleidovskou metrikou, kde vezmeme osu x a hyperbolu $y = 1/x$.

2.2.24 Trojúhelníková nerovnost

$$\left|\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right| \leq \left|\frac{1}{a} - \frac{1}{c}\right| + \left|\frac{1}{c} - \frac{1}{b}\right|$$

plyne z trojúhelníkové nerovnosti pro absolutní hodnotu $|x-y| \leq |x-z|+|z-y|$ volbou $x = 1/a$, $y = 1/b$, $z = 1/c$. Ostatní vlastnosti metriky jsou zřejmé.
Z definice plyne $d(a, b) < 1$ pro všechna $a, b \in \mathbb{N}$, tedy každá množina je omezená, neboť se vejde do koule s libovolným středem a poloměrem 1.

2.2.25 Pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí, že posloupnost $(1, \dots, 1, 0, \dots)$, která je tvořena k jedničkami a poté samými nulami, je prvkem množiny M. Vzdálenost této posloupnosti od nulové posloupnosti, která je rovněž prvkem M, je

$$\|(1, \dots, 1, 0, \dots) - (0, 0, \dots)\|_2 = \|(1, \dots, 1, 0, \dots)\|_2 = \sqrt{k}.$$

Jelikož $\sqrt{k}$ může být libovolně velké číslo, musí být průměr množiny M nekonečný a množina není omezená.

2.3.11 Nemá vnitřní, vnější ani izolované body. Všechny body z $\mathbb{R}$ jsou hraničními a hromadnými body M. Platí $M^\circ = \emptyset$, $\partial M = \overline{M} = \mathbb{R}$.

2.3.12 Například $\{2^n : n \in \mathbb{Z}\}$.

2.3.13 Nemá žádné izolované ani vnitřní body (tj. $M^\circ = \emptyset$). Dále platí

$$\partial M = \overline{M} = M \cup \{(0, y) : y \in [-1, 1]\},$$

hromadné body jsou totožné s hraničními, vnější body jsou všechny body z $\mathbb{R}^2 \setminus \partial M$.

2.3.14 Obecně neplatí, např. v diskrétním metrickém prostoru X pro libovolný bod x máme $B_1(x) = \{x\}$ a tudíž $\overline{B_1(x)} = \{x\}$, zatímco $K_1(x) = X$.

2.3.15 Všechny body z M jsou vnitřní. Vnější body jsou posloupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell^{\infty}$ splňující $x_1 < x_2$. Dále platí $M^{\circ} = M$, $\overline{M} = \{\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell^{\infty} : x_1 \geq x_2\}$, $\partial M = \{\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell^{\infty} : x_1 = x_2\}$. M je otevřená, není uzavřená.

2.3.16 Všechny body z M jsou hraniční, nemá vnitřní body. Vnější body jsou všechny funkce $f \in C([0,1])$ splňující $f(0) \neq f(1)$. Platí $M^{\circ} = \emptyset$, $\overline{M} = \partial M = M$. M je uzavřená, není otevřená.

2.4.20 Není konvergentní pro žádné $p \in [1, \infty]$.

2.4.21 V $C([0,1])$ není konvergentní, v $L^1([0,1])$ konverguje k nulové funkci.

2.4.22 $\overline{M} = \{f \in X : f(1/2) \geq 1/2\}$.

2.4.23 Definujeme-li $f(x,y) = (x^2+y^2)^3 - (x^2-y^2)^2$, pak $M_1 = f^{-1}((-\infty,0))$ a $M_2 = f^{-1}(\{0\})$. Definujeme-li $g(x,y) = \sin(x^2y^3)$ a $h(x,y) = y - 2\sin(x^2y^3)$, pak

$$M_3 = \big(g^{-1}((0,\infty)) \cap h^{-1}((0,\infty))\big) \cup \big(g^{-1}((-\infty,0)) \cap h^{-1}((-\infty,0))\big).$$

2.4.24 Není uzavřená, což plyne např. z příkladu 2.4.6.

2.5.12 Například $\bigcap_{n=1}^{\infty}(0, \frac{1}{n}) = \emptyset$, $\bigcap_{n=1}^{\infty}[n, \infty) = \emptyset$.

2.5.13 Nechť $\{x^k\}_{k=1}^{\infty}$ je cauchyovská posloupnost posloupností v ℓ^{∞}. Pak pro všechna $i, k, l \in \mathbb{N}$ platí nerovnost

$$|x_i^k - x_i^l| \leq \|x^k - x^l\|_{\infty},$$

ze které plyne, že posloupnost i-tých složek $\{x_i^k\}_{k=1}^{\infty}$ je rovněž cauchyovská. Protože $\mathbb{R}$ je úplný prostor, existuje limita $\lim_{i\to\infty} x_i^k$; označme ji x_i a položme $x = \{x_i\}_{i=1}^{\infty}$. Potřebujeme ověřit, že $x \in \ell^{\infty}$, a dokázat konvergenci $x^k \to x$ vzhledem k metrice v prostoru ℓ^{∞}.

Pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pokud $k, l \geq n_0$, pak $\|x^k - x^l\|_{\infty} < \varepsilon$. To znamená, že pro každé $i \in \mathbb{N}$ platí $|x_i^k - x_i^l| < \varepsilon$. Limitním přechodem $l \to \infty$ získáme $|x_i^k - x_i| \leq \varepsilon$ pro každé $i \in \mathbb{N}$ a $k \geq n_0$, neboli $\|x^k - x\|_{\infty} \leq \varepsilon$ pro $k \geq n_0$. Tím je dokázána konvergence $x^k \to x$ v ℓ^{∞}. Z nerovnosti $\|x\|_{\infty} \leq \|x - x^k\|_{\infty} + \|x^k\|_{\infty} < \infty$ je vidět, že $x \in \ell^{\infty}$.

2.5.14 Lze vzít např. posloupnost funkcí $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde $f_n(x) = 0$ pro $x \in [0, \frac{1}{2} - \frac{1}{2^n}]$, $f_n(x) = 1$ pro $x \in [\frac{1}{2}, 1]$ a na intervalu $[\frac{1}{2} - \frac{1}{2^n}, \frac{1}{2}]$ je f_n lineární. Tato posloupnost konverguje v $L^1([0,1])$ k funkci f, která má hodnotu 0 na $[0, \frac{1}{2})$ a hodnotu 1 na $[\frac{1}{2}, 1]$. V $L^1([0,1])$ však ztotožňujeme funkce, které se rovnají skoro všude, limitou $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je tedy ve skutečnosti třída všech funkcí, které se shodují s f skoro všude; žádná z těchto funkcí ale není spojitá.

2.5.15 Je lipschitzovské s konstantou $K = 1$, není kontrakce, nemá pevný bod.

2.5.16 Jde o posloupnost $x_0 = \sqrt{2}$ a $x_n = f(x_{n-1})$ pro $n \in \mathbb{N}$. f je kontrakce, $[\sqrt{2}, \infty)$ je úplný metrický prostor a posloupnost $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ konverguje k jedinému pevnému bodu f na $[\sqrt{2}, \infty)$, kterým je 2.

2.5.17 Platí $\|F(f) - F(g)\|_{\infty} \leq (b-a)\|f-g\|_{\infty}$. Pokud $b - a < 1$, pak jde o kontrakci. Pokud $b - a \geq 1$, pak pro funkce $f \equiv 1$ a $g \equiv 0$ platí $\|F(f) - F(g)\|_{\infty} = (b-a) = (b-a)\|f-g\|_{\infty}$, tudíž se nejedná o kontrakci. Pevným bodem F je spojitá funkce, která splňuje $f(t) = \int_a^t f$. Odtud plyne $f(a) = 0$ a $f'(t) = f(t)$ pro $t \in [a,b]$; jediná funkce splňující tyto podmínky je nulová funkce.

2.6.9 Například pro $M = \mathbb{Q}$ platí $M^{\circ} = \emptyset$, $(\overline{M})^{\circ} = \mathbb{R}$.

2.6.10 Například $\mathbb{Q}$ i $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ jsou husté.

2.6.11 Například $\mathbb{Q}$ je spočetným sjednocením jednobodových množin obsahujících jednotlivá racionální čísla.

2.6.12 Nechť $p \in [1, \infty)$. Zvolme $x \in \ell^p$ a $\varepsilon > 0$. Pak existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\sum_{n=n_0+1}^{\infty} |x_n|^p < \frac{\varepsilon^p}{2}$. Pro každé $n \in \{1, \ldots, n_0\}$ existuje $q_n \in \mathbb{Q}$ splňující $|q_n - x_n| < \frac{\varepsilon}{(2n_0)^{1/p}}$. Pro $y = (q_1, \ldots, q_{n_0}, 0, 0, \ldots) \in M$ platí

$$\|x - y\|_p = \left(\sum_{n=1}^{n_0} |x_n - q_n|^p + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{1/p} < \left(\frac{\varepsilon^p}{2} + \frac{\varepsilon^p}{2}\right)^{1/p} = \varepsilon.$$

M není hustá v ℓ^∞. Například vzdálenost posloupnosti $x = (1, 1, 1, \ldots) \in \ell^\infty$ od každé posloupnosti z M je aspoň 1, tudíž $x \notin \overline{M}$.