Součty sudých mocnin převrácených hodnot přirozených čísel

Antonín Slavík
Matematicko-fyzikální fakulta UK

1 Úvod

Na cvičení jsme dokázali, že platí $\sum_{m=1}^{\infty} 1/m^2 = \pi^2/6$ (basilejský problém) a $\sum_{m=1}^{\infty} 1/m^4 = \pi^4/90$. Eulerovi se po vyřešení basilejského problému podařilo objevit obecný vzorec pro součet sudých mocnin převrácených hodnot přirozených čísel:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^{2k}} = \frac{(2\pi)^{2k}(-1)^{k-1}}{2(2k)!} B_{2k}, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{1.1}$$

kde B_i je i-té Bernoulliovo číslo. Ukážeme si důkaz předchozího vzorce využívající Fourierových řad a Bernoulliových polynomů.

2 Vlastnosti Bernoulliho polynomů

Připomeňme, že Bernoulliho čísla jsou hodnotami Bernoulliho polynomů v bodě 0 (tedy jejich absolutní členy), tj. $B_k = B_k(0)$.

Budeme potřebovat následující vlastnosti Bernoulliho polynomů:

1. $\forall n \in \mathbb{N}_0\ \forall k \in \mathbb{N}_0$
$$\int_n^{n+1} B_k(x)\,\mathrm{d}x = n^k. \tag{2.1}$$
2. $\forall k \in \mathbb{N}\ \forall x \in \mathbb{R}\ B_k'(x) = kB_{k-1}(x)$.
3. $\forall k \geq 2\ B_k(0) = B_k(1)$.
4. $\forall k \in \mathbb{N}_0\ \forall x \in \mathbb{R}\ B_k(1-x) = (-1)^k B_k(x)$.
5. $\forall k \in \mathbb{N}\ B_{2k+1}(0) = B_{2k+1}(1) = B_{2k+1} = 0$.

Vlastnosti 1, 2, 3 jsou zdůvodněny v textu Davida Bressouda (tvrzení 2 se získá derivováním vzorce (A.27)).

Důkaz tvrzení 4:

Zavedeme-li substituci $u = 1 - x$, dostaneme s využitím vztahu (2.1) rovnosti

$$\int_n^{n+1} B_k(1-x)\,\mathrm{d}x = -\int_{1-n}^{-n} B_k(u)\,\mathrm{d}u = \int_{-n}^{-n+1} B_k(u)\,\mathrm{d}u = (-n)^k = (-1)^k n^k = (-1)^k \int_n^{n+1} B_k(x)\,\mathrm{d}x.$$

Převedeme-li pravou stranu na levou a sloučíme integrály, vidíme, že platí

$$\int_n^{n+1} \left(B_k(1-x) - (-1)^k B_k(x)\right)\mathrm{d}x = 0$$

pro každé $n \in \mathbb{N}$. Jelikož integrovaná funkce je polynom, vyplývá odsud, že je identicky nulový (nekonstantní polynom je pro dostatečně velké hodnoty buď vždy kladný, nebo vždy záporný,[1] a tudíž nemůže mít nulový integrál na intervalu kladné délky).

Důkaz tvrzení 5:

Z tvrzení 4 plyne volbou $x = 0$ rovnost $B_{2k+1}(1) = (-1)^{2k+1} B_{2k+1}(0) = -B_{2k+1}(0)$, ale podle tvrzení 3 současně platí $B_{2k+1}(1) = B_{2k+1}(0)$. To je možné jen tehdy, když $B_{2k+1}(1) = B_{2k+1}(0) = 0$, a tedy $B_{2k+1} = 0$.

3 Důkaz vzorce (1.1)

Pro každé $k \in \mathbb{N}$ uvažujme funkci $f^k : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, která je sudým rozšířením Bernoulliho polynomu B_{2k} z intervalu $[0, 1]$ na interval $[-1, 1]$. Najdeme reálnou Fourierovu řadu této funkce a vhodnou volbou x pak získáme vzorec (1.1).

Nechť a_n^k, b_n^k jsou reálné Fourierovy koeficienty funkce f^k (horní indexy nejsou mocniny, ale pořadová čísla – pro každé $k \in \mathbb{N}$ máme jednu sadu Fourierových koeficientů). Protože f^k je sudá, platí $b_n^k = 0$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ a stačí vypočítat koeficienty a_n^k, $n \in \mathbb{N}_0$. Ze sudosti f^k a vzorce (2.1) plyne

$$a_0^k = \int_{-1}^{1} f^k(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^1 B_{2k}(x)\,\mathrm{d}x = 2 \cdot 0^{2k} = 0.$$

Pro $n \geq 1$ dvakrát integrujeme per partes a využíváme přitom vzorec $B_k'(x) = kB_{k-1}(x)$:

$$\begin{aligned}
a_n^k &= \int_{-1}^{1} f^k(x)\cos(\pi n x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^1 B_{2k}(x)\cos(\pi n x)\,\mathrm{d}x = \\
&= 2\left[B_{2k}(x)\frac{\sin(\pi n x)}{\pi n}\right]_{x=0}^{1} - \frac{4k}{\pi n}\int_0^1 B_{2k-1}(x)\sin(\pi n x)\,\mathrm{d}x = \\
= -\frac{4k}{\pi n}&\left(\left[-B_{2k-1}(x)\frac{\cos(\pi n x)}{\pi n}\right]_{x=0}^{1} + \frac{2k-1}{\pi n}\int_0^1 B_{2k-2}(x)\cos(\pi n x)\,\mathrm{d}x\right) = \\
&= \frac{4k}{(\pi n)^2}\left(B_{2k-1}(1)\cdot(-1)^n - B_{2k-1}(0)\right) - \frac{2k\cdot(2k-1)}{(\pi n)^2}a_n^{k-1}.
\end{aligned}$$

Pro $k = 1$ využijeme toho, že $a_n^0 = 0$ (ověřte pomocí vzorce $B_0(x) = 1$), $B_1(0) = -1/2$, $B(1) = 1/2$, a obdržíme

$$a_n^1 = \frac{4}{(\pi n)^2}\left(B_1(1)\cdot(-1)^n - B_1(0)\right) = \begin{cases} 0 & \text{pro } n \in \mathbb{N} \text{ liché,} \\ \frac{4}{(\pi n)^2} & \text{pro } n \in \mathbb{N} \text{ sudé.} \end{cases}$$

Pro $k \geq 2$ víme, že $B_{2k-1}(0) = B_{2k-1}(1) = 0$, a tudíž

$$a_n^k = -\frac{2k\cdot(2k-1)}{(\pi n)^2}a_n^{k-1}.$$

$(k-1)$-násobným použitím tohoto rekurentního vzorce a ze znalosti a_n^1 vypočteme

$$a_n^k = \begin{cases} 0 & \text{pro } n \in \mathbb{N} \text{ liché,} \\ \frac{2\cdot(-1)^{k-1}(2k)!}{(\pi n)^{2k}} & \text{pro } n \in \mathbb{N} \text{ sudé.} \end{cases}$$

Můžeme tedy napsat Fourierovu řadu funkce f^k:

$$F^k(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^k \cos(\pi n x) = \sum_{m=1}^{\infty} a_{2m}^k \cos(2\pi m x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2\cdot(-1)^{k-1}(2k)!}{(2\pi m)^{2k}}\cos(2\pi m x).$$

[1] Závisí to na znaménku koeficientu u nejvyšší mocniny.

Funkce f^k je spojitá v nule, tedy platí

$$F^k(0) = f^k(0) = B_{2k}(0) = B_{2k},$$

čili

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{2 \cdot (-1)^{k-1}(2k)!}{(2\pi m)^{2k}} = B_{2k},$$

odkud již snadnou úpravou plyne vzorec (1.1).

4 Riemannova funkce zeta

Funkce definovaná předpisem

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

se nazývá Riemannova funkce zeta. V předchozím textu jsme získali její hodnoty pro sudá přirozená čísla:

$$\zeta(2k) = \frac{(2\pi)^{2k}(-1)^{k-1}}{2(2k)!} B_{2k}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Nekonečná řada v definici ζ konverguje pro všechna $s \in (1, \infty)$, je však možné uvažovat i komplexní hodnoty s (komplexní mocnina se počítá pomocí komplexní exponenciály: $n^s = e^{s \ln n}$). S Riemannovou funkcí zeta v komplexním oboru je spojen jeden z nejslavnějších otevřených problémů v matematice, tzv. Riemannova hypotéza. Viz např. záznam přednášky na `https://www.youtube.com/watch?v=tHm7MnPkBiI`.