Úplné metrické prostory

Antonín Slavík
Matematicko-fyzikální fakulta UK

1 Úplné prostory a jejich vlastnosti

Posloupnost reálných čísel je konvergentní, právě když je cauchyovská. Toto kritérium je užitečné v situaci, kdy chceme dokázat existenci limity, ale neznáme její hodnotu.

V předchozí přednášce jsme definovali konvergentní a cauchyovské posloupnosti v metrickém prostoru. V tomto obecném kontextu stále platí, že každá konvergentní posloupnost je cauchyovská. Existují však metrické prostory, kde cauchyovská posloupnost nemusí mít limitu. Tím je motivována následující definice.

Definice 1.1. Metrický prostor X se nazývá *úplný*, pokud každá cauchyovská posloupnost v X má limitu v X.

Úplný normovaný lineární prostor se zkráceně nazývá *Banachův prostor*, úplný prostor se skalárním součinem se zkráceně nazývá *Hilbertův prostor*.

S Hilbertovými prostory jsme se již setkali při studiu abstraktních Fourierových řad. Obecněji, součet nekonečné řady můžeme definovat v každém normovaném lineárním prostoru X jako limitu částečných součtů: Máme-li posloupnost $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ tvořenou prvky z X, pak definujeme

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} x_i,$$

pokud limita na pravé straně existuje (jde o limitu v normovaném lineárním – tedy metrickém – prostoru). Pokud je navíc prostor X úplný (tj. Banachův), pak nutná a postačující podmínka pro konvergenci řady je cauchyovskost částečných součtů. S její pomocí lze dokázat např. analogii známého tvrzení z reálné analýzy o absolutní konvergenci: Pokud $\sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\|$ konverguje, pak $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ konverguje. Důkaz je stejný jako v reálném případě, viz např. `https://en.wikipedia.org/wiki/Absolute_convergence#Proof_that_any_absolutely_convergent_series_in_a_Banach_space_is_convergent`.

Uveďme několik příkladů úplných a neúplných prostorů:

- $\mathbb{R}$ s eukleidovskou metrikou je úplný.
- $(0,1)$ s eukleidovskou metrikou není úplný. Např. posloupnost $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ je cauchyovská (protože jde o konvergentní posloupnost reálných čísel), ale nemá limitu v $(0,1)$.
- $\mathbb{Q}$ s eukleidovskou metrikou není úplný. Např. posloupnost $\{(1+\frac{1}{n})^n\}_{n=1}^{\infty}$ je cauchyovská (protože jde o konvergentní posloupnost reálných čísel), ale nemá limitu v $\mathbb{Q}$ (Eulerovo číslo je iracionální).
- $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ s eukleidovskou metrikou není úplný. Např. posloupnost $\{\frac{\sqrt{2}}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ je cauchyovská (protože jde o konvergentní posloupnost reálných čísel), ale nemá limitu v $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.
- Pro každé $p\in[1,\infty)$ je prostor $L^p(X,\mu)$ úplný, tj. Banachův prostor – viz přednášku Matematická analýza V. Pro $p=2$ dostáváme Hilbertův prostor $L^2(X,\mu)$. Je-li $X=\mathbb{N}$ a μ je aritmetická míra, pak $L^p(X,\mu)$ se redukuje na prostor posloupností ℓ^p, který je tím pádem úplný.

- Diskrétní metrický prostor na libovolné množině X je úplný. Jak vypadají cauchyovské posloupnosti? Volíme-li v definici $\varepsilon < 1$, vidíme, že každá cauchyovská posloupnost musí být od jistého indexu konstantní, tudíž je konvergentní.

Druhý, třetí a čtvrtý z výše uvedených příkladů představují speciální případy následující věty, neboť jde o podprostory úplného metrického prostoru $\mathbb{R}$.

Věta 1.2. *Nechť X je úplný metrický prostor a $Y \subset X$. Pak Y je úplný metrický prostor, právě když Y je uzavřená v X.*

Důkaz. Nechť Y je uzavřená v X a $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ je cauchyovská posloupnost v Y. Protože jde rovněž o cauchyovskou posloupnost v úplném prostoru X, musí mít limitu v X. Jelikož Y je uzavřená, musí tato limita ležet v Y (viz důsledek 1.9 z předchozí přednášky).

Nechť Y je úplný metrický prostor. Ukážeme, že $\overline{Y} \subset Y$ (opačná inkluze je zřejmá). Pokud $y \in \overline{Y}$, pak existuje posloupnost bodů $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ z Y, která konverguje k y (viz větu 1.8 z předchozí přednášky). Tato posloupnost je nutně cauchyovská. Protože Y je úplný prostor, musí limita y ležet v Y. □

Zastavme se ještě u dvou důležitých příkladů úplných prostorů.

Příklad 1.3. Pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a $p \in [1, \infty]$ je n-rozměrný vektorový prostor ℓ_n^p úplný. Jedná se totiž o speciální případ úplného prostoru $L^p(X, \mu)$, kde $X = \{1, \ldots, n\}$ a μ je aritmetická míra.

Je však možné postupovat mnohem elementárněji: Nechť $\{x^k\}_{k=1}^{\infty}$ je cauchyovská posloupnost bodů v ℓ_n^p. Pro jejich i-té složky, kde $i \in \{1, \ldots, n\}$, platí nerovnost

$$|x_i^k - x_i^l| \leq \|x^k - x^l\|_p, \quad k, l \in \mathbb{N},$$

ze které plyne, že $\{x_i^k\}_{k=1}^{\infty}$ je cauchyovská posloupnost reálných čísel. Protože $\mathbb{R}$ je úplný prostor, existuje $\lim_{k\to\infty} x_i^k$; označme ji x_i a položme $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Ukázali jsme, že posloupnost bodů $\{x^k\}_{k=1}^{\infty}$ konverguje po složkách k bodu x. Podle věty 1.4 z předchozí přednášky to znamená, že $\lim_{k\to\infty} x^k = x$ vzhledem k metrice v prostoru ℓ_n^p.

Příklad 1.4. Prostor spojitých funkcí $C([a, b])$ se suprémovou normou je úplný.

Nechť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je cauchyovská posloupnost funkcí v $C([a, b])$. Pro každé $x \in [a, b]$ platí nerovnost

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_\infty, \quad n, m \in \mathbb{N},$$

ze které plyne, že posloupnost funkčních hodnot $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ je rovněž cauchyovská. Protože $\mathbb{R}$ je úplný prostor, existuje $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$; označme ji $f(x)$. Ukázali jsme, že posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ bodově konverguje k funkci f. Potřebujeme ještě ověřit, že $f \in C([a, b])$, a dokázat konvergenci posloupnosti vzhledem k metrice v prostoru $C([a, b])$, která je podle věty 1.7 z předchozí přednášky ekvivalentní se stejnoměrnou konvergencí.

Pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pokud $m, n \geq n_0$, pak $\|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon$. To znamená, že pro každé $x \in [a, b]$ platí $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$. Limitním přechodem $m \to \infty$ získáme $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ pro každé $x \in [a, b]$ a $n \geq n_0$, čímž je dokázána stejnoměrná konvergence $f_n \rightrightarrows f$. Spojitost f na $[a, b]$ vyplývá ze skutečnosti, že jde o stejnoměrnou limitu posloupnosti spojitých funkcí.

Následující lemma nesouvisí s úplnými metrickými prostory, potřebujeme je pouze k důkazu další věty.

Lemma 1.5. *Je-li M neprázdná podmnožina metrického prostoru X, pak diam $\overline{M}$ = diam M.*

Důkaz. Stačí dokázat diam $\overline{M} \leq$ diam M, obrácená nerovnost je zřejmá. Volme libovolně $x, y \in \overline{M}$. Pak existují posloupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ tvořené body z M takové, že $x_n \to x$, $y_n \to y$. Z definice průměru množiny plyne

$$d(x_n, y_n) \leq \operatorname{diam} M, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Z trojúhelníkové nerovnosti dostaneme

$$d(x, y) \le d(x, x_n) + d(x_n, y_n) + d(y_n, y) \le d(x, x_n) + \operatorname{diam} M + d(y_n, y).$$

Limitním přechodem pro $n \to \infty$ pak získáme nerovnost $d(x, y) \le \operatorname{diam} M$. Protože x, y byly libovolné prvky $\overline{M}$, dokázali jsme nerovnost $\operatorname{diam} \overline{M} \le \operatorname{diam} M$. □

Z reálné analýzy je dobře znám tzv. princip vložených intervalů: Máme-li posloupnost omezených uzavřených intervalů $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \cdots$, pak jejich průnik je neprázdný. Pokud navíc délky intervalů konvergují k nule, pak jejich průnik obsahuje právě jeden bod. Následující věta ukazuje, že podobné tvrzení platí v každém úplném metrickém prostoru (a naopak v neúplném prostoru neplatí).

Věta 1.6 (Cantor)**.** *Následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

1. *X je úplný metrický prostor.*
2. *Pro každou nerostoucí posloupnost[1] neprázdných uzavřených množin $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$ v X takových, že $\operatorname{diam} M_n \to 0$, je průnik $\bigcap_{n=1}^{\infty} M_n$ jednobodová množina.*

Důkaz. Pro důkaz $1 \Rightarrow 2$ volme $x_n \in M_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Dokážeme, že $\bigcap_{n=1}^{\infty} M_n = \{x\}$, kde x je limita posloupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Ukažme nejprve, že limita existuje. Volme libovolné $\varepsilon > 0$. Podle předpokladu existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\operatorname{diam} M_{n_0} < \varepsilon$. Víme, že pro $n \ge n_0$ platí $M_n \subset M_{n_0}$. To znamená, že pro všechna $m, n \ge n_0$ platí

$$d(x_n, x_m) \le \operatorname{diam} M_{n_0} < \varepsilon.$$

Tedy $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je cauchyovská a má limitu $x \in X$.

Ukažme, že $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} M_n$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ a každé $i \ge n$ platí $x_i \in M_i \subset M_n$, tj. počínaje n-tým členem leží prvky $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ v M_n. Jelikož M_n je uzavřená, je též limita x prvkem M_n. Protože $n \in \mathbb{N}$ bylo libovolné, platí $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} M_n$.

Zbývá dokázat, že $\bigcap_{n=1}^{\infty} M_n$ neobsahuje žádný jiný prvek kromě x. Nechť $y \in \bigcap_{n=1}^{\infty} M_n$. Pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $x, y \in M_n$, tedy

$$d(x, y) \le \operatorname{diam} M_n.$$

Limitním přechodem $n \to \infty$ získáme $d(x, y) \le 0$, což nastává jen tehdy, když $x = y$.

Pro důkaz $2 \Rightarrow 1$ předpokládejme, že $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je cauchyovská, a ukažme, že má limitu. Položme

$$M_n = \overline{\{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots\}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Platí $M_1 \supset M_2 \supset M_3 \supset \cdots$, každá množina M_n je uzavřená a neprázdná. Ukažme, že $\operatorname{diam} M_n \to 0$. Pro libovolné $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}_0$ takové, že pro všechna $m, n \ge n_0$ platí $d(x_m, x_n) < \varepsilon$. Z definice průměru množiny pak plyne

$$\operatorname{diam} \{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots\} \le \varepsilon, \quad n \ge n_0.$$

Podle lemmatu 1.5

$$\operatorname{diam} M_n = \operatorname{diam} \overline{\{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots\}} \le \varepsilon, \quad n \ge n_0,$$

čímž je dokázáno $\operatorname{diam} M_n \to 0$.

Podle předpokladu existuje $x \in X$ takové, že $\bigcap_{n=1}^{\infty} M_n = \{x\}$. Tvrdíme, že $x_n \to x$. Skutečně, pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\operatorname{diam} M_{n_0} < \varepsilon$. Jelikož pro $n \ge n_0$ máme $x_n, x \in M_{n_0}$, platí $d(x_n, x) < \varepsilon$. □

[1] Posloupnost množin je nerostoucí, pokud $M_1 \supset M_2 \supset M_3 \supset \cdots$.

2 Banachova věta o pevném bodu

Definice 2.1. Bod $x \in X$ se nazývá *pevným bodem* zobrazení $f : X \to X$, pokud $f(x) = x$.

Mnoho úloh v matematice, jako např. řešení nejrůznějších rovnic, lze převést na hledání pevného bodu (viz příklady v oddílech 3 a 4). Nejznámější větou, která udává postačující podmínku pro existenci a jednoznačnost pevného bodu, je Banachova věta. Navíc poskytuje i návod, jak pevný bod najít.

Věta 2.2 (Banach)**.** *Je-li X úplný metrický prostor a zobrazení $f : X \to X$ je kontrakce, pak má právě jeden pevný bod $x \in X$.*

Volíme-li $x_0 \in X$ libovolně a pro každé $n \in \mathbb{N}$ položíme $x_n = f(x_{n-1})$, pak $x_n \to x$.

Důkaz. Podle definice kontrakce existuje číslo $K \in [0, 1)$ takové, že

$$d(f(x), f(y)) \leq Kd(x, y), \quad x, y \in X.$$

Volme $x_0 \in X$ libovolně a pro každé $n \in \mathbb{N}$ položme $x_n = f(x_{n-1})$. Ukážeme, že tato rekurentně zadaná posloupnost má limitu. Pro vzdálenosti dvou po sobě jdoucích členů této posloupnosti platí

$$\begin{aligned}
d(x_1, x_2) &= d(f(x_0), f(x_1)) \leq Kd(x_0, x_1),\\
d(x_2, x_3) &= d(f(x_1), f(x_2)) \leq Kd(x_1, x_2) \leq K^2 d(x_0, x_1),\\
d(x_3, x_4) &= d(f(x_2), f(x_3)) \leq Kd(x_2, x_3) \leq K^3 d(x_0, x_1),\\
&\dots\\
d(x_i, x_{i+1}) &= d(f(x_{i-1}), f(x_i)) \leq Kd(x_{i-1}, x_i) \leq K^i d(x_0, x_1).
\end{aligned}$$

K odhadnutí vzdálenosti dvou členů x_m a x_n, které nemusejí jít bezprostředně po sobě, použijeme trojúhelníkovou nerovnost. Pokud $m > n$, pak

$$\begin{aligned}
d(x_n, x_m) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots + d(x_{m-1}, x_m) \leq\\
&\leq K^n d(x_0, x_1) + K^{n+1} d(x_0, x_1) + \cdots + K^{m-1} d(x_0, x_1) =\\
&= K^n d(x_0, x_1)(1 + K + \cdots + K^{m-n-1}) = K^n d(x_0, x_1)\frac{1 - K^{m-n}}{1 - K} \leq K^n d(x_0, x_1)\frac{1}{1 - K}.
\end{aligned}$$

Výraz na pravé straně má pro $n \to \infty$ limitu 0, z čehož vyplývá, že $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je cauchyovská posloupnost. Má tedy limitu $x \in X$. Dále platí

$$x = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x),$$

kde poslední rovnost plyne ze spojitosti f. Ukázali jsme, že x je pevným bodem f. Pokud by existoval další pevný bod $y \neq x$, platilo by $d(x, y) = d(f(x), f(y)) \leq Kd(x, y) < d(x, y)$, což je spor. □

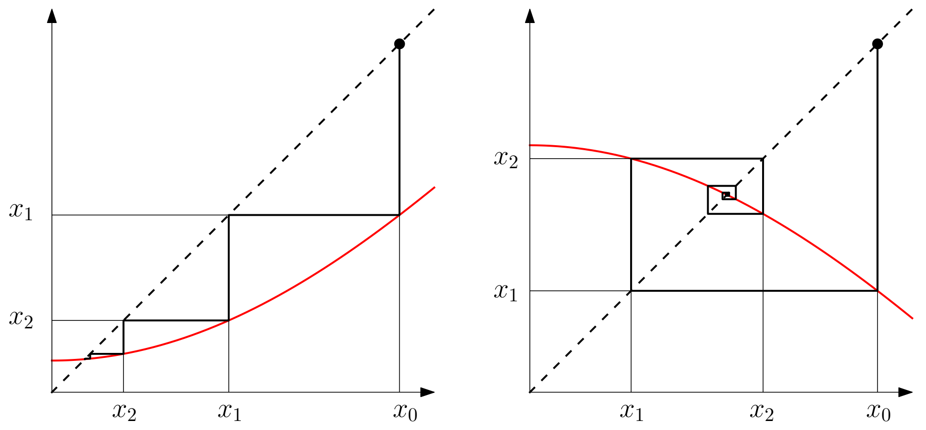
Je-li dáno zobrazení f, jak poznáme, že jde o kontrakci? Většinou nezbývá, než ověřit podmínku z definice. V případě, kdy f je diferencovatelná reálná funkce jedné reálné proměnné, lze použít následující větu.

Věta 2.3. *Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je interval a $f : I \to \mathbb{R}$ diferencovatelná funkce. Označíme-li $K = \sup_{x\in I} |f'(x)|$, pak platí:*

1. *f je lipschitzovské zobrazení $\iff K < \infty$.*
2. *f je kontrakce $\iff K < 1$.*

Důkaz. Pro každé dva různé body $x, y \in I$ platí podle Lagrangeovy věty o střední hodnotě rovnost $f(x) - f(y) = f'(\xi)(x - y)$, kde $\xi \in I$ je bod ležící mezi x, y. Tedy

$$|f(x) - f(y)| = |f'(\xi)| \cdot |x - y| \leq K|x - y|,$$



Obrázek 1: Iterace x_0, $x_1 = f(x_0)$, $x_2 = f(x_1)$, $\ldots$ konvergují k pevnému bodu f

odkud plynou obě implikace zprava doleva.

K důkazu obrácených implikací volme libovolné $L < K$. Podle definice supréma existuje $x \in I$ takové, že $|f'(x)| > L$. Z definice derivace pak vyplývá, že najdeme bod $y \in I$ různý od x a takový, že

$$\left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| > L,$$

neboli $|f(x) - f(y)| > L|x - y|$. Pokud $K = \infty$, můžeme L volit libovolně velké a vidíme, že f není lipschitzovské zobrazení. Pokud $K \geq 1$, můžeme L volit libovolně blízko 1 a vidíme, že f není kontrakce. $\square$

V případě reálné funkce f se dá hledání pevného bodu metodou popsanou v Banachově větě znázornit graficky, viz obr. 1. Pevný bod je průsečík grafu funkce f s přímkou $y = x$ (čárkovaně). Na ose x volíme libovolnou hodnotu x_0 a najdeme příslušnou funkční hodnotu $x_1 = f(x_0)$. S pomocí čárkované čáry přeneseme hodnotu x_1 z osy y na osu x a analogicky pokračujeme dále. Ekvivalentně lze postupovat tak, že konstruujeme lomenou čáru, kde se střídají svislé úsečky mířící ke grafu funkce s vodorovnými úsečkami mířícími k přímce $y = x$. Pokud jsou splněny předpoklady Banachovy věty, pak posloupnost $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ konverguje k pevnému bodu f. Obrázek ukazuje, že pokud je f v okolí pevného bodu rostoucí (vlevo), pak se k pevnému bodu přibližujeme z jedné strany a lomená čára připomíná schodiště. Pokud je f klesající (vpravo), pak se k pevnému bodu přibližujeme střídavě z obou stran a lomená čára připomíná spirálu.

V následujících oddílech si ukážeme dva příklady použití Banachovy věty.

3 Přibližný výpočet odmocniny

Předpokládejme, že je dáno reálné číslo $a > 0$ a chceme vypočítat přibližnou hodnotu $\sqrt{a}$. Následující postup využívající pouze sčítání a dělení byl znám již ve starověké Mezopotámii:

- Zvolíme libovolné číslo $x_0 > 0$.
- Pro každé $n \in \mathbb{N}$ položíme
$$x_n = \frac{1}{2}\left(x_{n-1} + \frac{a}{x_{n-1}}\right).$$

Čísla x_0, x_1, x_2, $\ldots$ představují stále lepší aproximace $\sqrt{a}$. Intuitivní vysvětlení je následující: Pokud $x_{n-1} < \sqrt{a}$, pak $a/x_{n-1} > \sqrt{a}$. Pokud naopak $x_{n-1} > \sqrt{a}$, pak $a/x_{n-1} < \sqrt{a}$. V obou případech tedy další člen x_n vzniká tak, že průměrujeme číslo menší než $\sqrt{a}$ s číslem větším než $\sqrt{a}$.

Zkusme pro ilustraci počítat např. $\sqrt{2}$, přičemž vezmeme nepříliš přesný počáteční odhad $x_0 = 2$. Pak dostáváme následující hodnoty (vypisujeme prvních 50 cifer):

$$
\begin{aligned}
x_0 &= 2.0000000000000000000000000000000000000000000000000\\
x_1 &= 1.5000000000000000000000000000000000000000000000000\\
x_2 &= 1.4166666666666666666666666666666666666666666666667\\
x_3 &= 1.4142156862745098039215686274509803921568627450980\\
x_4 &= 1.4142135623746899106262955788901349101165596221157\\
x_5 &= 1.4142135623730950488016896235025302436149819257762\\
x_6 &= 1.4142135623730950488016887242096980785696718753772
\end{aligned}
$$

Porovnáním se skutečnou hodnotou

$$\sqrt{2} = 1.4142135623730950488016887242096980785696718753769$$

vidíme, že x_6 se shoduje s $\sqrt{2}$ na 48 platných cifer, algoritmus je tedy velmi efektivní.

Pokusme se zdůvodnit správnost algoritmu, tj. dokázat, že $\lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt{a}$. Členy posloupnosti počítáme stejně jako v Banachově větě pomocí rekurentního vzorce

$$x_n = f(x_{n-1}), \quad n \in \mathbb{N},$$

kde

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right).$$

Z nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem plyne, že pokud $x > 0$, pak

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right) \geq \sqrt{x \cdot \frac{a}{x}} = \sqrt{a}.$$

To znamená, že všechny členy posloupnosti s výjimkou nultého, který jsme volili libovolně, leží v intervalu $[\sqrt{a}, \infty)$. Nultý člen si můžeme odmyslet, neboť neovlivní existenci ani hodnotu $\lim_{n\to\infty} x_n$. Omezíme se tedy na metrický prostor $X = [\sqrt{a}, \infty)$, který je podle věty 1.2 úplný. Z věty 2.3 plyne, že zobrazení $f : X \to X$ je kontrakce, neboť

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{a}{x^2}\right),\\
|f'(x)| &\leq \frac{1}{2}, \quad x \in [\sqrt{a}, \infty).
\end{aligned}
$$

Tím jsme ověřili předpoklady Banachovy věty, ze které plyne, že posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje k jedinému pevnému bodu zobrazení f. Abychom našli hodnotu pevného bodu, řešíme rovnici $x = f(x)$ za předpokladu $x \in [\sqrt{a}, \infty)$:

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right)\\
2x &= x + \frac{a}{x}\\
x &= \frac{a}{x}\\
x^2 &= a\\
x &= \sqrt{a}
\end{aligned}
$$

Vidíme, že f má na intervalu $[\sqrt{a}, \infty)$ pevný bod $x = \sqrt{a}$, který je limitou posloupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.

4 Diferenciální rovnice – Picardova věta

Klasickým příkladem použití Banachovy věty je odvození Picardovy věty – základní věty o existenci a jednoznačnosti řešení diferenciální rovnice s počáteční podmínkou

$$x'(t) = f(t, x(t)), \quad x(t_0) = x_0. \tag{4.1}$$

Picardova věta říká, že pokud je f definována v okolí bodu (t_0, x_0), je zde spojitá a lipschitzovská vzhledem ke druhé proměnné,[2] pak má úloha právě jedno řešení definované na okolí bodu t_0. Jde tedy o lokální výsledek – globální existenci řešení např. na celé reálné ose nelze obecně očekávat, neboť řešení může v konečném čase utéct do nekonečna („blow up“). Následující formulace věty udává informaci o délce intervalu $[t_0 - c, t_0 + c]$, na kterém je zaručena existence a jednoznačnost řešení.

Pro zjednodušení zápisu se omezíme na skalární rovnici, přestože věta platí i pro vektorové rovnice (tj. soustavy rovnic); čtenář si může samostatně promyslet, jak se v tomto případě změní důkaz.

Věta 4.1 (Picard). *Předpokládejme, že* $t_0, x_0 \in \mathbb{R}$*,* $a, b > 0$*,* $f : [t_0 - a, t_0 + a] \times [x_0 - b, x_0 + b] \to \mathbb{R}$ *je spojitá a existuje* $L > 0$ *takové, že pro všechna* $t \in [t_0 - a, t_0 + a]$ *a* $x, y \in [x_0 - b, x_0 + b]$ *platí*

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq L|x - y|. \tag{4.2}$$

Označme $M = \sup\{|f(t, x)| : t \in [t_0 - a, t_0 + a], x \in [x_0 - b, x_0 + b]\}$*. Pak pro každé* $c \in (0, \min(a, b/M, 1/L))$ *má úloha* (4.1) *právě jedno řešení na intervalu* $[t_0 - c, t_0 + c]$*.*

Důkaz. Pokud x je řešením úlohy (4.1) na intervalu $[t_0 - c, t_0 + c]$, pak integrováním $x'(s) = f(s, x(s))$ od t_0 do t a využitím toho, že $\int_{t_0}^{t} x'(s)\,\mathrm{d}s = x(t) - x(t_0) = x(t) - x_0$, získáme

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\,\mathrm{d}s, \quad t \in [t_0 - c, t_0 + c]. \tag{4.3}$$

Obráceně, z (4.3) plyne (4.1): Platnost vztahu $x(t_0) = x_0$ je zřejmá a derivováním (4.3) podle t získáme $x'(t) = f(t, x(t))$. Dále tedy budeme hledat řešení integrální rovnice (4.3), která je ekvivalentní s (4.1).

Řešení musí být spojitá funkce, jejíž graf neopustí obdélník, na kterém je definována funkce f. Musí tedy patřit do množiny funkcí

$$X = \{x \in C([t_0 - c, t_0 + c]) : \forall t \in [t_0 - c, t_0 + c] \;\; |x(t) - x_0| \leq b\}.$$

Na X se budeme dívat jako na metrický prostor se suprémovou normou. Můžeme si všimnout, že jde vlastně o uzavřenou kouli $K_b(x_0)$ v prostoru $C([t_0 - c, t_0 + c])$. Podle věty 1.2 a příkladu 1.4 se tudíž jedná o úplný metrický prostor. Řešení rovnice (4.3) nyní převedeme na hledání pevného bodu. Pro každou funkci $x \in X$ definujme funkci $F(x)$ předpisem

$$F(x)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\,\mathrm{d}s, \quad t \in [t_0 - c, t_0 + c].$$

F je tedy zobrazení, které funkcím přiřazuje funkce. Rovnice (4.3) je splněna, právě když $x(t) = F(x)(t)$ pro všechna $t \in [t_0 - c, t_0 + c]$, což nastává, právě když $x = F(x)$.

K dokončení důkazu stačí ověřit, že F splňuje předpoklady Banachovy věty. Z definice konstanty M a z požadavků kladených na hodnotu c vyplývá, že

$$|F(x)(t) - x_0| \leq \int_{t_0}^{t} |f(s, x(s))|\,\mathrm{d}s \leq M|t - t_0| \leq Mc < b, \quad t \in [t_0 - c, t_0 + c].$$

[2] To nastává např. tehdy, když má v okolí (t_0, x_0) spojitou a tudíž omezenou parciální derivaci $\frac{\partial f}{\partial x}$, srov. s větou 2.3.

Vidíme, že F je zobrazení z X do X. Dále s využitím podmínky (4.2) pro $x, y \in X$ platí

$$|F(x)(t) - F(y)(t)| = \left| \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\,\mathrm{d}s - \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))\,\mathrm{d}s \right| \leq \int_{t_0}^{t} |f(s, x(s)) - f(s, y(s))|\,\mathrm{d}s \leq$$
$$\leq \int_{t_0}^{t} L \cdot |x(s) - y(s)|\,\mathrm{d}s \leq L \cdot |t - t_0| \cdot \|x - y\|_\infty \leq Lc \cdot \|x - y\|_\infty, \quad t \in [t_0 - c, t_0 + c],$$

tudíž $\|F(x) - F(y)\|_\infty \leq Lc \cdot \|x - y\|_\infty$. Protože $Lc < 1$, ukázali jsme, že F je kontrakce. □

Poznámka 4.2. Podle Banachovy věty můžeme pevný bod F najít jako limitu posloupnosti, jejíž nultý člen $y_0 \in X$ volíme libovolně a dále počítáme $y_n = F(y_{n-1})$, $n \in \mathbb{N}$. Zkusme tímto postupem pro ilustraci řešit rovnici $x'(t) = x(t)$, $x(0) = 1$. Pak $t_0 = 0$, $x_0 = 1$, $f(t, x) = x$ a zobrazení F je dáno předpisem

$$F(x)(t) = 1 + \int_0^t x(s)\,\mathrm{d}s.$$

Volíme-li např. $y_0(t) = 1$, $t \in \mathbb{R}$, pak ze vzorce $y_n = F(y_{n-1})$ dostáváme posloupnost

$$\begin{aligned}
y_1(t) &= 1 + \int_0^t 1\,\mathrm{d}s = 1 + t,\\
y_2(t) &= 1 + \int_0^t (1 + s)\,\mathrm{d}s = 1 + t + \frac{t^2}{2},\\
y_3(t) &= 1 + \int_0^t (1 + s + \frac{s^2}{2})\,\mathrm{d}s = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{2 \cdot 3},
\end{aligned}$$

atd. Není těžké uhodnout, že $y_n(t) = \sum_{i=0}^{n} \frac{t^i}{i!}$, a tudíž řešení diferenciální rovnice je $\lim_{n\to\infty} y_n(t) = \mathrm{e}^t$.

5 Cvičení

Cvičení 5.1. Ukažte, že pokud z Cantorovy věty 1.6 vynecháme předpoklad uzavřenosti M_n nebo předpoklad diam $M_n \to 0$, pak tvrzení neplatí a průnik $\bigcap_{n=1}^{\infty} M_n$ může být prázdný.

Cvičení 5.2. Dokažte, že prostor všech omezených posloupností ℓ^∞ se suprémovou normou je úplný. (Postupujte obdobně jako v příkladu 1.4).

Cvičení 5.3. Nechť X je prostor všech spojitých funkcí na intervalu $[0, 1]$ s integrální normou

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f|.$$

Dokažte, že X není úplný – použijte větu 1.2 a ukažte, že X je podmnožina $L^1([0, 1])$, která není uzavřená. (Najděte vhodnou posloupnost spojitých funkcí, která konverguje v $L^1([0, 1])$ k limitě, která není spojitá.)

Cvičení 5.4. Uvažujme reálnou funkci f definovanou předpisem $f(x) = x + \frac{1}{x}$, $x \in [1, \infty)$. Rozhodněte, zda se jedná o lipschitzovské zobrazení, případně kontrakci. Má pevný bod?

Cvičení 5.5. Ukažte, že funkce $f : [\sqrt{2}, \infty) \to [\sqrt{2}, \infty)$ definovaná předpisem $f(x) = \sqrt{2 + x}$ je kontrakce. Pomocí Banachovy věty o pevném bodu pak najděte limitu posloupnosti

$$\sqrt{2}, \quad \sqrt{2 + \sqrt{2}}, \quad \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}, \quad \ldots$$

Cvičení 5.6. Na metrickém prostoru $X = C([a, b])$ uvažujme zobrazení $F : X \to X$ definované předpisem

$$F(f)(t) = \int_a^t f, \quad f \in X, \quad t \in [a, b].$$

Najděte všechny pevné body F. Ukažte, že F je kontrakce, právě když $b - a < 1$.

Řešení:

1. Například $\bigcap_{n=1}^{\infty}(0, \frac{1}{n}) = \emptyset$, $\bigcap_{n=1}^{\infty}[n, \infty) = \emptyset$.

2. Nechť $\{x^k\}_{k=1}^{\infty}$ je cauchyovská posloupnost posloupností v ℓ^{∞}. Pak pro všechna $i, k, l \in \mathbb{N}$ platí nerovnost

$$|x_i^k - x_i^l| \leq \|x^k - x^l\|_{\infty},$$

ze které plyne, že posloupnost i-tých složek $\{x_i^k\}_{k=1}^{\infty}$ je rovněž cauchyovská. Protože $\mathbb{R}$ je úplný prostor, existuje limita $\lim_{i\to\infty} x_i^k$; označme ji x_i a položme $x = \{x_i\}_{i=1}^{\infty}$. Potřebujeme ověřit, že $x \in \ell^{\infty}$, a dokázat konvergenci $x^k \to x$ vzhledem k metrice v prostoru ℓ^{∞}.

Pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pokud $k, l \geq n_0$, pak $\|x^k - x^l\|_{\infty} < \varepsilon$. To znamená, že pro každé $i \in \mathbb{N}$ platí $|x_i^k - x_i^l| < \varepsilon$. Limitním přechodem $l \to \infty$ získáme $|x_i^k - x_i| \leq \varepsilon$ pro každé $i \in \mathbb{N}$ a $k \geq n_0$, neboli $\|x^k - x\|_{\infty} \leq \varepsilon$ pro $k \geq n_0$. Tím je dokázána konvergence $x^k \to x$ v ℓ^{∞}. Z nerovnosti $\|x\|_{\infty} \leq \|x - x^k\|_{\infty} + \|x^k\|_{\infty} < \infty$ je vidět, že $x \in \ell^{\infty}$.

3. Lze vzít např. posloupnost funkcí $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde $f_n(x) = 0$ pro $x \in [0, \frac{1}{2} - \frac{1}{2^n}]$, $f_n(x) = 1$ pro $x \in [\frac{1}{2}, 1]$ a na intervalu $[\frac{1}{2} - \frac{1}{2^n}, \frac{1}{2}]$ je f_n lineární. Tato posloupnost konverguje v $L^1([0,1])$ k funkci f, která má hodnotu 0 na $[0, \frac{1}{2})$ a hodnotu 1 na $[\frac{1}{2}, 1]$. V $L^1([0,1])$ však ztotožňujeme funkce, které se rovnají skoro všude, limitou $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je tedy ve skutečnosti třída všech funkcí, které se shodují s f skoro všude; žádná z těchto funkcí ale není spojitá.

4. Je lipschitzovské s konstantou $K = 1$, není kontrakce, nemá pevný bod.

5. Jde o posloupnost $x_0 = \sqrt{2}$ a $x_n = f(x_{n-1})$ pro $n \in \mathbb{N}$. f je kontrakce, $[\sqrt{2}, \infty)$ je úplný metrický prostor a posloupnost $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ konverguje k jedinému pevnému bodu f na $[\sqrt{2}, \infty)$, kterým je 2.

6. Platí $\|F(f) - F(g)\|_{\infty} \leq (b-a)\|f - g\|_{\infty}$. Pokud $b - a < 1$, pak jde o kontrakci. Pokud $b - a \geq 1$, pak pro funkce $f \equiv 1$ a $g \equiv 0$ platí $\|F(f) - F(g)\|_{\infty} = (b-a) = (b-a)\|f - g\|_{\infty}$, tudíž se nejedná o kontrakci. Pevným bodem F je spojitá funkce, která splňuje $f(t) = \int_a^t f$. Odtud plyne $f(a) = 0$ a $f'(t) = f(t)$ pro $t \in [a, b]$; jediná funkce splňující tyto podmínky je nulová funkce.