## 3. Definice funkcí. Grafy, křivky a plochy.

Definice funkce jedné nebo více proměnných: `f[x_]:=výraz` `f[x_,y_,...]:=výraz`
Zrušení přiřazení hodnoty nebo definice funkce: `Clear[identifikátor]`
Funkce definovaná po částech: `Piecewise[{{výraz`$_1$`,podmínka`$_1$`},{výraz`$_2$`,podmínka`$_2$`},...}]`

Graf funkce jedné proměnné: `Plot[f[x],{x,min,max}]`
Více funkcí v jednom grafu: `Plot[{f`$_1$`[x],f`$_2$`[x],...},{x,min,max}]`

Vzhled grafu lze ovlivnit pomocí volby `PlotStyle` a následujících direktiv:
Jména barev: `Black Blue Brown Cyan Gray Green Magenta Orange Pink Purple Red White Yellow`
Zadání barvy pomocí RGB trojice: `RGBColor[r,g,b]`
Tloušťka čáry: `Thin` `Thick` `AbsoluteThickness[tloušťka]`
Styl čáry: `Dashed` `Dotted` `DotDashed`

Další užitečné volby:
Poměr stran: `AspectRatio->výška/šířka` `AspectRatio->Automatic` (stejné měřítko na obou osách)
Zobrazování os: `Axes->True` nebo `Axes->False`
Zobrazování rámečku: `Frame->True` nebo `Frame->False`
Styl textu: `BaseStyle->{FontFamily->"název písma", FontSize->velikost}`

Kompletní seznam voleb lze získat pomocí `Options[Plot]` (viz též dokumentaci k `Plot`).

Graf funkce dvou proměnných: `Plot3D[f[x,y],{x,min`$_1$`,max`$_1$`},{y,min`$_2$`,max`$_2$`}]`
Funkce dvou proměnných jako hustota: `DensityPlot[f[x,y],{x,min`$_1$`,max`$_1$`},{y,min`$_2$`,max`$_2$`}]`
Vrstevnice funkce dvou proměnných: `ContourPlot[f[x,y],{x,min`$_1$`,max`$_1$`},{y,min`$_2$`,max`$_2$`}]`

Implicitně zadané útvary:
Křivka: `ContourPlot[f[x,y]==g[x,y],{x,min`$_1$`,max`$_1$`},{y,min`$_2$`,max`$_2$`}]`
Plocha: `ContourPlot3D[f[x,y,z]==g[x,y,z],{x,min`$_1$`,max`$_1$`},{y,min`$_2$`,max`$_2$`},{z,min`$_3$`,max`$_3$`}]`

Parametricky zadané útvary:
Rovinná křivka: `ParametricPlot[{x[t],y[t]},{t,min,max}]`
Rovinná oblast: `ParametricPlot[{x[t,u],y[t,u]},{t,min`$_1$`,max`$_1$`},{u,min`$_2$`,max`$_2$`}]`
Prostorová křivka: `ParametricPlot3D[{x[t],y[t],z[t]},{t,min,max}]`
Plocha v prostoru: `ParametricPlot3D[{x[t,u],y[t,u],z[t,u]},{t,min`$_1$`,max`$_1$`},{u,min`$_2$`,max`$_2$`}]`

Rovinná oblast popsaná podmínkou: `RegionPlot[podmínka,{x,min`$_1$`,max`$_1$`},{y,min`$_2$`,max`$_2$`}]`

Obrázky vygenerované všemi výše uvedenými příkazy jsou v Mathematice reprezentovány jako objekty typu `Graphics` nebo `Graphics3D`.
Uložení grafického objektu do souboru: `Export["název souboru",g]`
Sloučení více grafických objektů do jednoho: `Show[g`$_1$`,g`$_2$`,...]`

## CVIČENÍ

**1.** Dokažte, že funkce $f(x) = x/(e^x - 1) - 1 + x/2$ je sudá (vypočítejte $f(x) - f(-x)$, použijte `Simplify`).

**2.** Sestrojte grafy funkcí $\sin x$ a $\cos x$ pro $x \in [0, 2\pi]$ (zobrazte je do jednoho obrázku). Hodnoty vyznačené na osách $x$ a $y$ lze měnit volbou `Ticks`; zde je vhodné např. `Ticks->{{Pi/2,Pi,3Pi/2,2Pi},{-1,1}}`. Vyzkoušejte také volbu `Filling->Axis`.

**3.** Zobrazte graf funkce $f(x, y) = x + \sin(x^2 + y^2)$, $x, y \in [-4, 4]$ pomocí `Plot3D`, `ContourPlot` a `DensityPlot` (nastavte `PlotPoints->50` pro lepší kvalitu obrázku). Barevné schéma grafu lze ovlivnit volbou `ColorFunction`, např. `ColorFunction->"SunsetColors"`. Názvy všech předdefinovaných barevných schémat získáte pomocí `ColorData["Gradients"]`, zkuste některá z nich použít (fungují nejen u `Plot3D`, ale i u ostatních grafických příkazů).

**4.** Zobrazte plochu implicitně zadanou rovnicí $20x(3y^2 - x^2) - 24(x^2 + y^2) + 3z^2 = 0$, kde $x, y, z \in [-2, 2]$. Použijte volby `Mesh->None` a `PlotPoints->70`.

**5.** Znáte plochu s parametrizací

$$x(u, v) = \left(2 + v \cos \frac{u}{2}\right) \cos u, \quad y(u, v) = \left(2 + v \cos \frac{u}{2}\right) \sin u, \quad z(u, v) = v \sin \frac{u}{2},$$

kde $u \in [0, 2\pi]$ a $v \in [-0.5, 0.5]$? Vyzkoušejte, co udělá volba `Mesh->{m,n}`, kde $m$, $n$ je dvojice přirozených čísel.

**6.** Zobrazte množinu všech bodů v rovině splňujících nerovnost $(x^2 + y^2 - 1)^3 - x^2y^3 < 0$. Omezte se na $x \in [-1.2, 1.2]$ a $y \in [-1.1, 1.3]$, použijte volbu `ColorFunction->"ValentineTones"`.

**7.** Obor hodnot funkce tangens je neomezený, Mathematica tedy zobrazuje pouze vhodnou část; lze ji přesně specifikovat pomocí volby `PlotRange`. Vyzkoušejte např. tangens při volbě `PlotRange->{-50,50}`. Podobný problém někdy nastane i u omezených funkcí, např. $f(x) = (\sin x)/x$ na intervalu $[0, 20]$; zde stačí zadat `PlotRange->All` (vyzkoušejte).

**8.** Funkce $f(x) = x^2$ má v bodě $[1, 1]$ tečnu $t(x) = 2(x - 1) + 1$ a normálu $n(x) = -\frac{1}{2}(x - 1) + 1$. Pokud však zobrazíme grafy všech tří funkcí pomocí `Plot[{f[x],t[x],n[x]},{x,0,2}]`, zdá se, že přímky na sebe nejsou kolmé. Čím je to způsobeno?

**9.** Zobrazte graf funkce

$$f(x) = \begin{cases} -(x+1)^2 + 1, & x < -1 \\ 1, & x \in [-1, 1] \\ (x-1)^2 + 1, & x > 1. \end{cases}$$

**10.** Uvažujme třídu elips s rovnicemi $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, kde $a$, $b$ jsou kladná čísla splňující $a + b = 1$. Jejich obálkou (křivkou, která se dotýká každé elipsy) je asteroida popsaná rovnicí $|x|^{2/3} + |y|^{2/3} = 1$. Přesvědčte se o tom pomocí obrázku: Vykreslete asteroidu společně s elipsami $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, kde $a \in \{0.1, 0.2, \ldots, 0.9\}$ a $b = 1 - a$.

*Poznámka:* Při použití konstrukce typu `ContourPlot[Table[...]]`, je potřeba uzavřít `Table` do `Evaluate` a psát `ContourPlot[Evaluate[Table[...]]]`.

**11.** Řada $4/\pi \sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty} \sin(nx)/n$ konverguje na intervalu $(-\pi, \pi)$ k funkci $\operatorname{sgn} x$ (je to Fourierova řada této funkce). Zobrazte grafy prvních pěti částečných součtů této řady do jednoho obrázku.

**12.** Platónská hvězda je plocha implicitně zadaná rovnicí $(1-u)^3 - 5/27cu^3 + cv = 0$, kde $u = x^2 + y^2 + z^2$, $v = z(-2x(x^4 - 10x^2y^2 + 5y^4) - 5(x^2 + y^2)^2 z + 5(x^2 + y^2)z^3 - z^5)$ a $c$ je reálný parametr. Zobrazte tuto plochu pro $c = -0.6$, $c = -0.3$, $c = 3$, $c = 81$. Použijte volby `Mesh->None`, `PlotPoints->40`, `ContourStyle->{Specularity[White,100],Orange}`.

**13.** Zobrazte vrstevnice reálné části komplexní funkce

$$\left((x + iy)^2 + \frac{1}{16(x + iy)^2}\right)^3, \quad x, y \in [-1.5, 1.5].$$

Nastavte `PlotPoints->100`. Pomocí volby `Contours` lze předepsat hodnoty vrstevnic, které se mají zobrazovat. Vyzkoušejte `Contours->{0,1/2,-1/2,1,-1,2,-2,5,-5}`.