

#### 4. SEZNAMY A LINEÁRNÍ ALGEBRA

Seznamy se zapisují ve tvaru  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ .

První a poslední prvek seznamu: `First[seznam]` `Last[seznam]`

Přístup k prvku seznamu na pozici  $i$ : `seznam[[i]]`

Podseznam vymezený pozicemi  $i$  a  $j$ : `seznam[[i;;j]]`

Sestavení seznamu z funkčních hodnot: `Table[f[i],{i,min,max}]` `Table[f[i],{i,min,max,krok}]`

Seznam s identickými prvky: `Table[prvek,{počet kopií}]`

Aritmetické posloupnosti lze generovat pomocí `Range[n]`, `Range[min,max]`, `Range[min,max,krok]`.

Vložení prvku na konec seznamu: `Append[seznam,prvek]` `AppendTo[seznam,prvek]`

Vložení prvku na začátek seznamu: `Prepend[seznam,prvek]` `PrependTo[seznam,prvek]`

Vložení prvku na zadanou pozici v seznamu: `Insert[seznam,prvek,pozice]`

Smazání prvku seznamu na zadané pozici: `Delete[seznam,pozice]`

Délka seznamu: `Length[seznam]`

Součet prvků seznamu: `Total[seznam]`

Obrácení seznamu: `Reverse[seznam]`

Setřídění seznamu: `Sort[seznam]`

Cyklický posun seznamu: `RotateLeft[seznam]` `RotateLeft[seznam,n]` (analogicky `RotateRight`)

Spojení seznamů: `Join[seznam1,seznam2,...]`

Sjednocení (spojení, odstranění duplicit a setřídění): `Union[seznam1,seznam2,...]`

Průnik: `Intersection[seznam1,seznam2,...]`

Rozdíl  $S \setminus (S_1 \cup S_2 \cup \dots)$ : `Complement[S,S1,S2,...]`

Každou funkci  $f$ , která má nastaven atribut `Listable` (viz `Attributes[f]`), lze aplikovat na seznamy:

Funkce jedné proměnné:  $f[\{x_1, x_2, \dots\}] \rightarrow \{f[x_1], f[x_2], \dots\}$

Funkce více proměnných:  $f[\{x_1, x_2, \dots\}, \{y_1, y_2, \dots\}, \dots] \rightarrow \{f[x_1, y_1, \dots], f[x_2, y_2, \dots], \dots\}$

Vektory z  $\mathbf{R}^n$  nebo  $\mathbf{C}^n$  se zapisují jako  $n$ -prvkové seznamy  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ .

Násobení vektoru skalárem:  $a\{x_1, x_2, \dots\}$

Skalární součin:  $\{x_1, x_2, \dots\} \cdot \{y_1, y_2, \dots\}$

Vektorový součin v  $\mathbf{R}^3$ : `Cross[{x1,x2,x3},{y1,y2,y3}]`

Eukleidovská norma: `Norm[vektor]`

Matice  $\{a_{ij}\}$  typu  $m \times n$  je v Mathematice reprezentována jako seznam řádkových vektorů, tj. ve tvaru  $\{\{a_{11}, \dots, a_{1n}\}, \dots, \{a_{m1}, \dots, a_{mn}\}\}$ . Tento seznam lze zobrazit jako matici pomocí `MatrixForm`.

Přístup k prvku matice na pozici  $(i, j)$ : `A[[i,j]]`

Sestavení matice z funkčních hodnot: `Table[f[i,j],{i,min1,max1},{j,min2,max2}]`

Jednotková matice řádu  $n$ : `IdentityMatrix[n]`

Diagonální matice: `DiagonalMatrix[seznam prvků na diagonále]`

Transponovaná matice: `Transpose[matice]`

Násobení matic: `A.B`

Inverzní matice: `Inverse[matice]`

Determinant: `Det[matice]`

Mocnina matice: `MatrixPower[matice,exponent]`

Hodnota matice: `MatrixRank[matice]`

Gaussova eliminace: `RowReduce[matice]`

Řešení soustavy  $Ax = b$ : `LinearSolve[A,b]`

Báze všech řešení homogenní soustavy  $Ax = 0$ : `NullSpace[A]`

Vlastní čísla a vlastní vektory: `Eigenvalues[A]` `Eigenvectors[A]`

U funkcí `Inverse`, `Det`, `MatrixRank`, `RowReduce`, `LinearSolve` a `NullSpace` lze použít volbu `Modulus->p`.

## CVIČENÍ

1. Zkonstruuje seznam všech čísel z množiny  $\{1, \dots, 100\}$ , které zbydou po vyškrtání všech násobků dvojky, trojky a pětky. Kolik takových čísel je?
2. Funkce `Divisors[n]` vrací seznam dělitelů čísla  $n$ . Najděte všechny společné dělitele čísel 2010 a 4140.
3. Zjistěte, zda jsou vektory  $(0, -4, 3, 3)$ ,  $(8, 1, 3, -3)$ ,  $(1, 0, 0, 7)$  a  $(1, 3, 4, 8)$  lineárně závislé.
4. Najděte inverzní matici k  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ . Zkontrolujte, že  $AA^{-1}$  dá jednotkovou matici.

*Návod:* Zjednodušte součin matic pomocí `Simplify`.

5. Nadefinujte funkci `pridejSloupec[A,b]`, která pro zadanou matici  $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$  a vektor  $b \in \mathbf{R}^m$  vyrobí matici typu  $m \times (n + 1)$ ; ta vznikne připojením vektoru  $b$  jako posledního sloupce k matici  $A$ .
6. Hilbertova matice řádu  $n$  je definována předpisem  $H_n = \{\frac{1}{i+j-1}\}_{i,j=1}^n$ . Nadefinujte funkci `hilbert[n]`, která pro zadané  $n \in \mathbf{N}$  zkonstruuje matici  $H_n$ . Jak dlouho trvá výpočet  $H_{100}^{-1}$ ? Použijte příkaz `AbsoluteTiming[Inverse[hilbert[100]];]` (středník zamezí zobrazení spočtené matice).
7. Uvažujme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z + w &= 3, \\ x + 4y + 5z + 2w &= 2, \\ 2x + 9y + 8z + 3w &= 7, \\ 5x + 7y + 9z + 2w &= 20. \end{aligned}$$

Nechť  $A$  je matice této soustavy a  $b$  je vektor pravé strany. Soustava má nekonečně mnoho řešení (spočítejte hodnotu  $A$ ), funkce `LinearSolve[A,b]` vrátí pouze jedno (partikulární) řešení; proveďte zkoušku (vynásobte matici  $A$  řešením). Všechna řešení lze získat pomocí `Reduce[A.{x,y,z,w}==b,{x,y,z,w}]`, vyzkoušejte. Zkontrolujte, že partikulární řešení je zahrnuto v obecném řešení. Pomocí `NullSpace[A]` najděte bázi řešení homogenní soustavy a podívejte se, jak výsledek souvisí s dříve nalezeným obecným řešením nehomogenní soustavy.

8. Zkuste počítat mocniny matice  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Uhodnete, jaký tvar má  $n$ -tá mocnina? Dokažte tvrzení matematickou indukcí – ověřte indukční krok v *Mathematice*!
9. Otočení v rovině kolem bodu  $[0, 0]$  o úhel  $\alpha$  je lineární zobrazení s maticí  $\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$ . Uvažujme elipsu s parametrizací  $x(t) = 2 \cos t$ ,  $y(t) = \sin t$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ . Vykreslete tuto elipsu společně s křivkami, které vzniknou pootočením elipsy o úhly  $k\pi/4$ ,  $k \in \{1, \dots, 3\}$ .
10. Nadefinujte funkci, která ze zadaného seznamu  $\{a_1, \dots, a_n\}$  vyrobí matici

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_n & a_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_n & a_1 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Zkuste ji použít např. na seznam  $\{1, \dots, 10\}$ .

11. Definujte funkci `g[A]:=Reverse[Table[Reverse[A[[i]]],{i,1,Length[A]}]`. Jestliže  $A$  je libovolná matice, co je `g[A]`?
12. *Mathematica* umí provádět Gramovu-Schmidtovu ortogonalizaci, hledat minory matice, převádět matici na Jordanův kanonický tvar, počítat maticovou exponenciálu atd. Vyhledejte některé z těchto operací v nápovědě (sekce *Matrices & Linear Algebra*) a vyzkoušejte, jak fungují.