

## 1. PRVNÍ SETKÁNÍ S MATHEMATICOU

Vyhodnocení výrazu se provádí pomocí *Shift+Enter*, případně *Enter* na numerické klávesnici.

Aritmetické operace: + - \* / ^

Elementární funkce: Sqrt[x] Log[x] Log[základ,x] Exp[x] Abs[x]

Goniometrické funkce: Sin[x] Cos[x] Tan[x] Cot[x]

Inverzní funkce: ArcSin[x] ArcCos[x] ArcTan[x] ArcCot[x]

Hyperbolické funkce: Cosh[x] Sinh[x] Tanh[x] Coth[x]

Inverzní funkce: ArcSinh[x] ArcCosh[x] ArcTanh[x] ArcCoth[x]

Důležité konstanty: Pi E I

Práce s komplexními čísly: Re[z] Im[z] Conjugate[z]

Převod přesného čísla na desetinné: N[x] N[x,počet platných cifer]

Zaokrouhlování, celá část: Round[x] Floor[x] Ceiling[x]

Kombinatorika: n! Binomial[n,k]

Teorie čísel: Mod[m,n] GCD[n<sub>1</sub>,n<sub>2</sub>,...] LCM[n<sub>1</sub>,n<sub>2</sub>,...]

Prvočíselný rozklad: FactorInteger[n]

Test prvočíselnosti: PrimeQ[n]

Seznam funkčních hodnot: Table[f[i],{i,min,max}] Table[f[i],{i,min,max,krok}]

Přehlednější výpis seznamu: TableForm[Table[...]]

Sumy a součiny: Sum[f[i],{i,min,max}] Product[f[i],{i,min,max}]

Sumy i součiny mají také varianty s {i,min,max,krok}.

Přiřazení hodnoty proměnné: proměnná=hodnota

Zrušení přiřazení: Clear[proměnná]

Odkazy na výsledky přechozích výpočtů: % %% %%% atd.

Nápověda: ?identifikátor

Přerušení probíhajícího výpočtu: *Abort Evaluation* v menu *Evaluation* (klávesová zkratka *Alt+.*)

Přerušení výpočtu a ukončení jádra: *Quit Kernel* v menu *Evaluation*

## CVIČENÍ

Pro všechna cvičení zadaná v průběhu semestru platí následující pokyny: Úlohy řešte samostatně. Pokud není v zadání úloh řečeno něco jiného, používejte pouze příkazy a funkce, se kterými jsme se již seznámili. Konstrukce procedurálního programování (cykly, podmíněné příkazy) známé z jiných programovacích jazyků obvykle nepředstavují nejefektivnější způsob řešení úloh v Mathematice.

1. Vypočítejte  $\pi$  na 100 desetinných míst.
2. Eulerovo číslo  $e$  se nejčastěji definuje jako limita posloupnosti  $a_n = (1 + 1/n)^n$ . Vypočítejte hodnotu  $a_{100}$  s přesností na 15 míst a porovnejte ji se skutečnou hodnotou  $e$ .
3. Vypočítejte přibližnou hodnotu  $(\sqrt{2} - 3\sqrt[4]{3})^3$ .
4. Vypočítejte  $(2 + 3i)/(3 + 4i)$ , zjistěte absolutní hodnotu tohoto komplexního čísla.
5. Pomocí `IntegerLength[n]` lze zjistit počet cifer přirozeného čísla  $n$ . Vypočítejte  $1000!$  a určete, kolik má toto číslo cifer.
6. Sečtěte  $2^0 + 2^2 + 2^4 + \dots + 2^{20}$ .
7. Najděte součty řad  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{2^n}$ .
8. Funkce `Prime[n]` vrací  $n$ -té prvočíslo. Sestavte tabulku prvních padesáti prvočísel.
9. Pro výpočet přibližné hodnoty Eulerova čísla  $e$  lze použít řadu  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ .
  - a) Přesvědčte se, že Mathematica zná součet této řady.
  - b) Vypočítejte prvních deset částečných součtů této řady s přesností na patnáct míst (použijte `Sum`, `Table` a `TableForm`). Na kolik desetinných míst se poslední výsledek shoduje se skutečnou hodnotou  $e$ ?

10. Nekonečný součin

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{2n \cdot 2n}{(2n-1) \cdot (2n+1)} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{7} \dots$$

je znám pod názvem Wallisův součin (podle Johna Wallise, který jej objevil roku 1655).

- a) Jaká je hodnota Wallisova součinu?
  - b) Odpověď na předchozí otázku naznačuje, že Wallisův součin by se dal použít pro výpočet přibližné hodnoty  $\pi$ . Zkuste počítat částečné součiny a získejte tak představu o rychlosti konvergence.
11. Sestavte tabulku hodnot  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$  pro  $k = 2, 4, 6, \dots, 20$ .

12. Pierre de Fermat se domníval, že všechna čísla tvaru  $2^{2^n} + 1$  (kde  $n$  je přirozené číslo) jsou prvočísla. Ukažte, že se mýlil! Najděte nejmenší protipříklad. Kolik má toto číslo cifer a jak vypadá jeho prvočíselný rozklad?

13. Najděte vzorce pro součty  $1^k + 2^k + \dots + n^k$ , kde  $k = 1, \dots, 10$  ( $n$  je libovolné přirozené číslo). Použijte `Sum`, `Table` a `TableForm`.

14. Vypočítejte a zobrazte prvních deset řádků Pascalova trojúhelníku (použijte `TableForm`).

15. Pomocí `Timing[výraz]` lze změřit, jak dlouho trvá vyhodnocení zadaného výrazu. Výsledkem je dvojice hodnot – první je čas v sekundách, na druhém místě je výsledek výpočtu. Najděte součet prvních 100 000 členů harmonické řady  $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$  s přesností na 20 míst a změřte, jak dlouho tento výpočet trvá.

16. Pokuste se v dokumentaci nalézt funkce pro práci s čísly vyjádřenými v soustavách o různých základech. Převedte  $3^{10}$  do dvojkové soustavy. Zjistěte hodnotu čísla, které je v soustavě o základu 6 zapsáno jako 12345.