2. Symbolická matematika, řešení rovnic

Zjednodušení výrazu: `Simplify[výraz]` `FullSimplify[výraz]`
Vyhodnocení s dodatečnými předpoklady: `Assuming[předpoklad,výraz]`
Roznásobení výrazu: `Expand[výraz]` `ExpandAll[výraz]`
Převedení na společného jmenovatele: `Together[výraz]`
Rozklad na parciální zlomky: `Apart[racionální funkce]`
Rozklad na součin: `Factor[výraz]`
Úpravy goniometrických výrazů: `TrigExpand[výraz]` `TrigReduce[výraz]`

Derivace: `D[funkce,proměnná]` `D[funkce,{proměnná,řád}]` `D[funkce,proměnná`$_1$`,proměnná`$_2$`,...]`
Primitivní funkce, integrál: `Integrate[funkce,proměnná]` `Integrate[funkce,{proměnná,min,max}]`

Rovnice se v Mathematice zapisují ve tvaru `levá strana==pravá strana`.
Řešení rovnice: `Solve[rovnice,neznámá]`
Soustava rovnic: `Solve[{rovnice`$_1$`,rovnice`$_2$`,...},{neznámá`$_1$`,neznámá`$_2$`,...}]`
Chceme-li rovnice řešit v tělese $\mathbf{Z}_p$ (p prvočíslo), použijeme volbu `Modulus->p`.

`Solve` se hodí zejména pro řešení algebraických rovnic. Funkce `Reduce`, která má stejnou syntaxi jako `Solve`, umí řešit i některé transcendentní rovnice, případně nerovnice.

`Reduce[rovnice nebo nerovnice,neznámá]` hledá řešení v oboru komplexních čísel.

`Reduce[rovnice nebo nerovnice,neznámá,Reals]` hledá jen reálná řešení (místo `Reals` může být `Rationals`, `Integers`, `PositiveIntegers`, ...).

`FindRoot` se používá k numerickému řešení rovnice se zadaným počátečním odhadem.
Jedna rovnice: `FindRoot[rovnice,{neznámá,odhad}]`
Soustava: `FindRoot[{rovnice`$_1$`,rovnice`$_2$`,...},{{neznámá`$_1$`,odhad`$_1$`},{neznámá`$_2$`,odhad`$_2$`},...}]`

Řešení rekurentní rovnice pro posloupnost $\{a_n\}$: `RSolve[rovnice,a[n],n]`
Soustava rekurentních rovnic: `RSolve[{rovnice`$_1$`,rovnice`$_2$`,...},{a[n],b[n],...},n]`
`RSolve` umí najít obecné řešení rekurentní rovnice, nebo řešení splňující jisté počáteční podmínky; ty se zapisují také mezi rovnice (např. `a[0]==1`).

Cvičení

1. Roznásobte součin $(x+y)^5(x+y+z)^2$.

2. Převeďte součet zlomků $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}+\cdots+\frac{1}{x+20}$ na společného jmenovatele.

3. Rozložte racionální funkci $\frac{(x-1)^2(x+2)}{(x+1)(x-3)^2}$ na parciální zlomky.

4. Sestavte tabulku vzorců pro $\sin(nx)$, $n \in \{2,3,\ldots,10\}$ (použijte `TrigExpand`, `Table`, `TableForm`).

5. Vypočítejte derivaci funkce $f(x)=(x^3+6x^5)/(2(1-x^3))$, výsledek zjednodušte. Najděte primitivní funkci k této derivaci. Zdůvodněte, proč je nalezený výsledek správný (vypočítejte rozdíl získané funkce a f).

6. Vypočítejte $\int_0^\pi \sqrt{1+\cos x}\,\mathrm{d}x$.

7. Najděte přesné hodnoty všech kořenů polynomu $x^4+2x^3-5x^2-4x+6$.

8. Vyřešte rovnici $\sqrt{x}=1-x$.

9. Najděte řešení soustavy rovnic $x=y+1$, $y^2=z$, $x+z=7$.

10. Vyřešte v tělese $\mathbf{Z}_7$ rovnici $2x=5$.

11. V oboru reálných čísel vyřešte rovnici $|x-1|+|2x+2|=5$.

12. V oboru reálných čísel vyřešte nerovnici $|(x-1)/(x+7)|>3$.

13. Vyřešte kvadratickou rovnici $ax^2+bx+c=0$ pomocí `Solve` a `Reduce`, porovnejte výsledky.

14. Najděte přibližnou hodnotu řešení rovnice $\sin x+\cos x=x$. Použijte funkci `FindRoot`, počáteční odhad můžete získat z grafu funkce $\sin x+\cos x-x$, který vykreslíte pomocí `Plot[Sin[x]+Cos[x]-x,{x,-10,10}]`.

15. Najděte vzorec pro n-tý člen posloupnosti $a_{n+1}=\frac{1}{3}a_n+1$, $a_0=0$.

16. Délka elipsy s poloosami o velikostech a, b je dána integrálem $\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}\,\mathrm{d}t$; tento integrál lze počítat pouze numericky. Povrch Země lze dobře aproximovat plochou, která vznikne rotací elipsy s poloosami $a \doteq 6378$ km (vzdálenost od středu k rovníku) a $b \doteq 6357$ km (vzdálenost od středu k pólu) kolem osy. Porovnejte délku cesty kolem světa podél rovníku (kružnice) a podél libovolného poledníku (elipsa).

17. Počet způsobů, jak rozměnit stokorunu pomocí pětikorun, desetikorun a dvacetikorun, je roven koeficientu u x^{100} v součinu

$$(1+x^5+x^{10}+\cdots+x^{100})(1+x^{10}+x^{20}+\cdots+x^{100})(1+x^{20}+x^{40}+\cdots+x^{100})$$

(víte, proč to platí?). Vypočítejte jej! V případě vyšších obnosů je zjišťování koeficientu roznásobením nepraktické, lepší je využít funkci `Coefficient[výraz,x,n]`, která vrací hodnotu koeficientu u x^n v zadaném výrazu. Vyzkoušejte se zadáním modifikovaným pro částku 1000 Kč.

18. Vyhledejte v nápovědě funkce pro dělení polynomů (hledejte v sekci *Polynomial Algebra*). Vypočítejte podíl a zbytek při dělení $(3x^2+15x+18):(x^2+3x+2)$.

19. Vyřešte následující úlohu převzatou z matematické olympiády: Pravoúhlý trojúhelník má celočíselné délky stran a obvod 11 990. Navíc víme, že jedna jeho odvěsna má prvočíselnou délku. Určete ji.
Návod: Řešte vhodnou soustavu rovnic v oboru přirozených čísel (`PositiveIntegers`).