

4. SEZNAMY A LINEÁRNÍ ALGEBRA

Seznamy se zapisují ve tvaru $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.

První a poslední prvek seznamu: `First[seznam]` `Last[seznam]`

Přístup k prvku seznamu na pozici i : `seznam[[i]]`

Podseznam vymezený pozicemi i a j : `seznam[[i;;j]]`

Sestavení seznamu z funkčních hodnot: `Table[f[i],{i,min,max}]` `Table[f[i],{i,min,max,krok}]`

Seznam s identickými prvky: `Table[prvek,{počet kopií}]`

Aritmetické posloupnosti lze generovat pomocí `Range[n]`, `Range[min,max]`, `Range[min,max,krok]`.

Vložení prvku na konec seznamu: `Append[seznam,prvek]` `AppendTo[seznam,prvek]`

Vložení prvku na začátek seznamu: `Prepend[seznam,prvek]` `PrependTo[seznam,prvek]`

Vložení prvku na zadanou pozici v seznamu: `Insert[seznam,prvek,pozice]`

Smazání prvku seznamu na zadané pozici: `Delete[seznam,pozice]`

Délka seznamu: `Length[seznam]`

Součet prvků seznamu: `Total[seznam]`

Obrácení seznamu: `Reverse[seznam]`

Setřídění seznamu: `Sort[seznam]`

Cyklický posun seznamu: `RotateLeft[seznam]` `RotateLeft[seznam,n]` (analogicky `RotateRight`)

Spojení seznamů: `Join[seznam1,seznam2,...]`

Sjednocení (spojení, odstranění duplicit a setřídění): `Union[seznam1,seznam2,...]`

Průnik: `Intersection[seznam1,seznam2,...]`

Rozdíl $S \setminus (S_1 \cup S_2 \cup \dots)$: `Complement[S,S1,S2,...]`

Každou funkci f , která má nastaven atribut `Listable` (viz `Attributes[f]`), lze aplikovat na seznamy:

Funkce jedné proměnné: $f[\{x_1, x_2, \dots\}] \rightarrow \{f[x_1], f[x_2], \dots\}$

Funkce více proměnných: $f[\{x_1, x_2, \dots\}, \{y_1, y_2, \dots\}, \dots] \rightarrow \{f[x_1, y_1, \dots], f[x_2, y_2, \dots], \dots\}$

Vektory z \mathbf{R}^n nebo \mathbf{C}^n se zapisují jako n -prvkové seznamy $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.

Násobení vektoru skalárem: $a\{x_1, x_2, \dots\}$

Skalární součin: $\{x_1, x_2, \dots\} \cdot \{y_1, y_2, \dots\}$

Vektorový součin v \mathbf{R}^3 : `Cross[{x1,x2,x3},{y1,y2,y3}]`

Eukleidovská norma: `Norm[vektor]`

Matice $\{a_{ij}\}$ typu $m \times n$ je v Mathematice reprezentována jako seznam řádkových vektorů, tj. ve tvaru $\{\{a_{11}, \dots, a_{1n}\}, \dots, \{a_{m1}, \dots, a_{mn}\}\}$. Tento seznam lze zobrazit jako matici pomocí `MatrixForm`.

Přístup k prvku matice na pozici (i, j) : `A[[i,j]]`

Sestavení matice z funkčních hodnot: `Table[f[i,j],{i,min1,max1},{j,min2,max2}]`

Jednotková matice řádu n : `IdentityMatrix[n]`

Diagonální matice: `DiagonalMatrix[seznam prvků na diagonále]`

Transponovaná matice: `Transpose[matice]`

Násobení matic: `A.B`

Inverzní matice: `Inverse[matice]`

Determinant: `Det[matice]`

Mocnina matice: `MatrixPower[matice,exponent]`

Hodnota matice: `MatrixRank[matice]`

Gaussova eliminace: `RowReduce[matice]`

Řešení soustavy $Ax = b$: `LinearSolve[A,b]`

Báze všech řešení homogenní soustavy $Ax = 0$: `NullSpace[A]`

Vlastní čísla a vlastní vektory: `Eigenvalues[A]` `Eigenvectors[A]`

U funkcí `Inverse`, `Det`, `MatrixRank`, `RowReduce`, `LinearSolve` a `NullSpace` lze použít volbu `Modulus->p`.

CVIČENÍ

1. Zkonstruuje seznam všech čísel z množiny $\{1, \dots, 100\}$, které zbydou po vyškrtání všech násobků dvojky, trojky a pětky. Kolik takových čísel je?
2. Funkce `Divisors[n]` vrací seznam dělitelů čísla n . Najděte všechny společné dělitele čísel 2010 a 4140.
3. Zjistěte, zda jsou vektory $(0, -4, 3, 3)$, $(8, 1, 3, -3)$, $(1, 0, 0, 7)$ a $(1, 3, 4, 8)$ lineárně závislé.
4. Najděte inverzní matici k $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Zkontrolujte, že AA^{-1} dá jednotkovou matici.

Návod: Zjednodušte součin matic pomocí `Simplify`.

5. Nadefinujte funkci `pridejSloupec[A,b]`, která pro zadanou matici $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$ a vektor $b \in \mathbf{R}^m$ vyrobí matici typu $m \times (n + 1)$; ta vznikne připojením vektoru b jako posledního sloupce k matici A .
6. Hilbertova matice řádu n je definována předpisem $H_n = \{\frac{1}{i+j-1}\}_{i,j=1}^n$. Nadefinujte funkci `hilbert[n]`, která pro zadané $n \in \mathbf{N}$ zkonstruuje matici H_n . Jak dlouho trvá výpočet H_{100}^{-1} ? Použijte příkaz `AbsoluteTiming[Inverse[hilbert[100]];]` (středník zamezí zobrazení spočtené matice).
7. Uvažujme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z + w &= 3, \\ x + 4y + 5z + 2w &= 2, \\ 2x + 9y + 8z + 3w &= 7, \\ 5x + 7y + 9z + 2w &= 20. \end{aligned}$$

Nechť A je matice této soustavy a b je vektor pravé strany. Soustava má nekonečně mnoho řešení (spočítejte hodnotu A), funkce `LinearSolve[A,b]` vrátí pouze jedno (partikulární) řešení; proveďte zkoušku (vynásobte matici A řešením). Všechna řešení lze získat pomocí `Reduce[A.{x,y,z,w}==b,{x,y,z,w}]`, vyzkoušejte. Zkontrolujte, že partikulární řešení je zahrnuto v obecném řešení. Pomocí `NullSpace[A]` najděte bázi řešení homogenní soustavy a podívejte se, jak výsledek souvisí s dříve nalezeným obecným řešením nehomogenní soustavy.

8. Zkuste počítat mocniny matice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Uhodnete, jaký tvar má n -tá mocnina?
9. Otočení v rovině kolem bodu $[0, 0]$ o úhel α je lineární zobrazení s maticí $\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$. Uvažujme elipsu s parametrizací $x(t) = 2 \cos t$, $y(t) = \sin t$, $t \in [0, 2\pi]$. Vykreslete tuto elipsu společně s křivkami, které vzniknou pootočením elipsy o úhly $k\pi/4$, $k \in \{1, \dots, 3\}$.
10. Nadefinujte funkci, která ze zadaného seznamu $\{a_1, \dots, a_n\}$ vyrobí matici

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_n & a_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_n & a_1 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Zkuste ji použít např. na seznam $\{1, \dots, 10\}$.

11. Definujte funkci `g[A]:=Reverse[Table[Reverse[A[[i]]],{i,1,Length[A]}]`. Jestliže A je libovolná matice, co je `g[A]`?
12. *Mathematica* umí provádět Gramovu-Schmidtovu ortogonalizaci, hledat minory matice, převádět matici na Jordanův kanonický tvar, počítat maticovou exponenciálu atd. Vyhledejte některé z těchto operací v nápovědě (sekce *Matrices & Linear Algebra*) a vyzkoušejte, jak fungují.