

2. SYMBOLICKÁ MATEMATIKA, ŘEŠENÍ ROVNIC

Zjednodušení výrazu: `Simplify[výraz]` `FullSimplify[výraz]`

Vyhodnocení s dodatečnými předpoklady: `Assuming[předpoklad,výraz]`

Roznásobení výrazu: `Expand[výraz]` `ExpandAll[výraz]`

Převedení na společného jmenovatele: `Together[výraz]`

Rozklad na parciální zlomky: `Apart[racionální funkce]`

Rozklad na součin: `Factor[výraz]`

Úpravy goniometrických výrazů: `TrigExpand[výraz]` `TrigReduce[výraz]`

Derivace: `D[funkce,proměnná]` `D[funkce,{proměnná,řád}]` `D[funkce,proměnná1,proměnná2,...]`

Primitivní funkce, integrál: `Integrate[funkce,proměnná]` `Integrate[funkce,{proměnná,min,max}]`

Rovnice se v Mathematice zapisují ve tvaru levá strana==pravá strana.

Řešení rovnice: `Solve[rovnice,neznámá]`

Soustava rovnic: `Solve[{rovnice1,rovnice2,...},{neznámá1,neznámá2,...}]`

Chceme-li rovnice řešit v tělese \mathbf{Z}_p (p prvočíslo), použijeme volbu `Modulus->p`.

`Solve` se hodí zejména pro řešení algebraických rovnic. Funkce `Reduce`, která má stejnou syntaxi jako `Solve`, umí řešit i některé transcendentní rovnice, případně nerovnice.

`Reduce[rovnice nebo nerovnice,neznámá]` hledá řešení v oboru komplexních čísel.

`Reduce[rovnice nebo nerovnice,neznámá,Reals]` hledá jen reálná řešení (místo `Reals` může být `Rationals`, `Integers`, `PositiveIntegers`, ...).

`FindRoot` se používá k numerickému řešení rovnice se zadaným počátečním odhadem.

Jedna rovnice: `FindRoot[rovnice,{neznámá,odhad}]`

Soustava: `FindRoot[{rovnice1,rovnice2,...},{neznámá1,odhad1},{neznámá2,odhad2,...}]`

Řešení rekurentní rovnice pro posloupnost $\{a_n\}$: `RSolve[rovnice,a[n],n]`

Soustava rekurentních rovnic: `RSolve[{rovnice1,rovnice2,...},{a[n],b[n],...},n]`

`RSolve` umí najít obecné řešení rekurentní rovnice, nebo řešení splňující jisté počáteční podmínky; ty se zapisují také mezi rovnice (např. `a[0]==1`).

CVIČENÍ

1. Roznásobte součin $(x + y)^5(x + y + z)^2$.
2. Převedte součet zlomků $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \dots + \frac{1}{x+15}$ na společného jmenovatele.
3. Rozložte racionální funkci $\frac{(x-1)^2(x+2)}{(x+1)(x-3)^2}$ na parciální zlomky.
4. Sestavte tabulku vzorců pro $\sin(nx)$, $n \in \{2, 3, \dots, 10\}$ (použijte `TrigExpand`, `Table`, `TableForm`).
5. Vypočítejte derivaci funkce $f(x) = (x^3 + 6x^5)/(2(1 - x^3))$, výsledek zjednodušte. Najděte primitivní funkci k této derivaci. Zdůvodněte, proč je nalezený výsledek správný (vypočítejte rozdíl získané funkce a f).
6. Vypočítejte $\int_0^\pi \sqrt{1 + \cos x} dx$.
7. Najděte kořeny polynomu $x^4 + 2x^3 - 5x^2 - 4x + 6$.
8. Vyřešte rovnici $\sqrt{x} = 1 - x$.
9. Najděte řešení soustavy rovnic $x = y + 1$, $y^2 = z$, $x + z = 7$.
10. Vyřešte v tělese \mathbf{Z}_7 rovnici $2x = 5$.
11. V oboru reálných čísel vyřešte rovnici $|x - 1| + |2x + 2| = 5$.
12. V oboru reálných čísel vyřešte nerovnici $|(x - 1)/(x + 7)| > 3$.
13. Vyřešte kvadratickou rovnici $ax^2 + bx + c = 0$ pomocí `Solve` a `Reduce`, porovnejte výsledky.
14. Najděte přibližnou hodnotu řešení rovnice $\sin x + \cos x = x$. Použijte funkci `FindRoot`, počáteční odhad můžete získat z grafu funkce $\sin x + \cos x - x$, který vykreslíte pomocí `Plot[Sin[x]+Cos[x]-x, {x, -10, 10}]`.
15. Najděte vzorec pro n -tý člen posloupnosti $a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + 1$, $a_0 = 0$.
16. Délka elipsy s poloosami o velikostech a , b je dána integrálem $\int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} dt$; tento integrál lze počítat pouze numericky. Povrch Země lze dobře aproximovat plochou, která vznikne rotací elipsy s poloosami $a \doteq 6378$ km (vzdálenost od středu k rovníku) a $b \doteq 6357$ km (vzdálenost od středu k pólu) kolem osy. Porovnejte délku cesty kolem světa podél rovníku (kružnice) a podél libovolného poledníku (elipsa).
17. Počet způsobů, jak rozměnit stokorunu pomocí pětikorun, desetikorun a dvacetikorun, je roven koeficientu u x^{100} v součinu

$$(1 + x^5 + x^{10} + \dots + x^{100})(1 + x^{10} + x^{20} + \dots + x^{100})(1 + x^{20} + x^{40} + \dots + x^{100})$$

(víte, proč to platí?). Vypočítejte jej! V případě vyšších obnosů je zjišťování koeficientu roznásobením nepraktické, lepší je využít funkci `Coefficient[výraz, x, n]`, která vrací hodnotu koeficientu u x^n v zadaném výrazu. Vyzkoušejte se zadáním modifikovaným pro částku 1000 Kč.

18. Vyhledejte v nápovědě funkce pro dělení polynomů (hledejte v sekci *Polynomial Algebra*). Vypočítejte podíl a zbytek při dělení $(3x^2 + 15x + 18) : (x^2 + 3x + 2)$.

19. Vyřešte následující úlohu převzatou z matematické olympiády: Pravoúhlý trojúhelník má celočíselné délky stran a obvod 11 990. Navíc víme, že jedna jeho odvěsna má prvočíselnou délku. Určete ji.

Návod: Řešte vhodnou soustavu rovnic v oboru přirozených čísel (`PositiveIntegers`).