5. Globální a lokální pravidla, matematická analýza pro začátečníky i pokročilé

Globální pravidlo: `levá strana=pravá strana`

Globální pravidlo s odloženým vyhodnocením: `levá strana:=pravá strana`

Informace o uložených pravidlech: `?identifikátor`

Zrušení pravidla: `Clear[identifikátor]`

Levá strana libovolného pravidla může obsahovat tzv. vzory. Je-li např. nějaký identifikátor na levé straně pravidla následován podtržítkem, znamená to, že na jeho místě může stát libovolný výraz.

1) Při zadání obyčejného pravidla se nejprve vyhodnotí pravá strana, poté se pravidlo uloží.
2) Při zadání pravidla s odloženým vyhodnocením se pravidlo ihned uloží, pravá strana se vyhodnocuje až při použití pravidla.

Globální pravidla se aplikují v pořadí od méně obecného k obecnějšímu.

Lokální pravidlo: `levá strana->pravá strana`

Lokální pravidlo s odloženým vyhodnocením: `levá strana:>pravá strana`

Aplikace lokálních pravidel: `výraz /. pravidlo`   `výraz /. {pravidlo`$_1$`,pravidlo`$_2$`,...}`

Lokální pravidla se aplikují v tom pořadí, ve kterém jsou uvedena (každé pouze jednou).

Použijeme-li `//.` místo `/.`, budou lokální pravidla aplikována opakovaně.

Limita funkce pro $x \to x_0$: `Limit[f[x],x->x`$_0$`]`

Jednostranné limity lze počítat pomocí `Direction->"FromAbove"`, resp. `Direction->"FromBelow"`.

Limita funkce více proměnných: `Limit[f[x,y,...],{x,y,...}->{x`$_0$`,y`$_0$`,...}]`

Limita posloupnosti pro $n \to \infty$: `DiscreteLimit[a[n],n->Infinity]`

Limes inferior/superior pro funkce, resp. posloupnosti: `MinLimit[f[x],x->x`$_0$`]` `MaxLimit[f[x],x->x`$_0$`]`
`DiscreteMinLimit[a[n],n->Infinity]` `DiscreteMaxLimit[a[n],n->Infinity]`

Konvergence nekonečné řady: `SumConvergence[a[n],n]`

Taylorův polynom funkce: `Series[f[x],{x,střed,stupeň}]`

Zbytku ve tvaru $O(x^n)$ se lze zbavit použitím `Normal[Series[...]]`.

Globální extrém funkce: `Minimize[f[x,y,...],{x,y,...}]` (analogicky `Maximize`)

Vázaný globální extrém: `Minimize[{f[x,y,...],podmínky},{x,y,...}]`

Lokální extrém numericky: `FindMinimum[f[x,y,...],{{x,x0},{y,y0},...}]` (analogicky `FindMaximum`)

Vázaný lokální extrém numericky: `FindMinimum[{f[x,y,...],podmínky},{{x,x0},{y,y0},...}]`

Řešení diferenciální rovnice pro $x(t)$: `DSolveValue[rovnice,x[t],t]`

Soustava rovnic pro $x(t), y(t), \ldots$: `DSolveValue[{rovnice`$_1$`,rovnice`$_2$`,...},{x[t],y[t],...},t]`

`DSolveValue` umí najít obecné řešení nebo řešení splňující zadané počáteční podmínky (ty se zapisují také mezi rovnice).

Cvičení

1. Vypočítejte $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{\cos(2x)+1}-\sqrt{\cos(3x)+1}}{\log(x^2+1)}$, zkontrolujte odpověď pomocí grafu.

2. Graf funkce $f(x) = \sin x + \arcsin x$ na intervalu $[-1, 1]$ je překvapivě rovný. Pokuste se to vysvětlit pomocí Taylorova rozvoje této funkce se středem v bodě 0.

3. Jak dobře je funkce kosinus aproximována Taylorovým polynomem stupně 8 se středem v bodě 0? Porovnejte jejich grafy (nakreslete je do jednoho obrázku).

4. Najděte přesné polohy globálních a lokálních extrémů funkce $f(x) = 42x^6 - 126x^5 + 105x^4 - 21x^2 + 1$ na intervalu $[-1, 2]$, ověřte výsledek pomocí grafu.

5. Definujme $f(x) = x^{1/x}$, $x > 0$. Spočítejte $\lim_{x\to 0+} f(x)$ a $\lim_{x\to\infty} f(x)$. Ve kterém bodě nabývá f globálního maxima? Ověřte nalezené výsledky pomocí grafu.

6. Zjistěte, pro která x konverguje mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n$.

7. Najděte řešení diferenciální rovnice $y'(t) = -t \cdot y(t)$ s počáteční podmínkou $y(0) = y_0$, kde $y_0 \in \mathbf{R}$ je parametr. Zakreslete do jednoho obrázku grafy všech řešení na intervalu $[-3, 3]$, která odpovídají hodnotám $y_0 \in \{-2, -1.5, -1, -0.5, 0, 0.5, 1, 1.5, 2\}$.

8. Počtáři ve starověkém Egyptě uměli pracovat se zlomky, měli však symboly pouze pro kmenové zlomky, tj. zlomky s čitatelem 1. Všechna ostatní racionální čísla zapisovali jako součty těchto zlomků, tj. ve tvaru $1/a_1 + 1/a_2 + \cdots + 1/a_n$, kde $a_1, \ldots, a_n$ jsou navzájem různá přirozená čísla. Naprogramujte funkci `egypt` takovou, že pro zadané racionální číslo $q \in [0, 1)$ najde `egypt[q]` příslušný rozklad a vrátí seznam sčítanců, tj. $\{1/a_1, 1/a_2, \ldots, 1/a_n\}$. Použijte tuto funkci k nalezení rozkladu čísla 99999/100000. O správnosti výsledku se můžete přesvědčit pomocí funkce `Total`, která sečte prvky zadaného seznamu.

Návod: Úlohu lze řešit pomocí „hladového“ algoritmu a rekurze. Definujte `egypt[0]={}`. Je-li $q > 0$, pak při výpočtu `egypt[q]` volte první jmenovatel a_1 tak, aby $1/a_1$ bylo co největší číslo menší než q, tj. $a_1 = \lceil 1/q \rceil$. Rozklad zbytku, tj. čísla $q - 1/a_1$, najděte rekurzivním voláním `egypt[q-1/a`$_1$`]`. K tomuto rozkladu pak připojte dříve získanou hodnotu $1/a_1$.

9. V úloze „hanojské věže“ jsou dány tři kolíky očíslované 1, 2, 3; na prvním z nich je postavena věž z n kotoučů různých velikostí (největší je vespod, nejmenší nahoře), ostatní jsou prázdné. V každém kroku lze přenést jeden kotouč mezi libovolnými dvěma kolíky, a to tak, že větší kotouč nikdy nesmí ležet na menším. Cílem hry je přenést všechny kotouče na třetí kolík. Naprogramujte funkci, která pro zadané n najde posloupnost kroků potřebných k vyřešení úlohy. Např. pro $n = 2$ bude výstupem funkce seznam `{1->2, 1->3, 2->3}` (kde `i->j` značí přenesení jednoho kotouče z kolíku i na kolík j.)

Návod: Úlohu lze řešit pomocí rekurze.

10. Definujte v Mathematice funkci

$$f(n,x) = \sqrt{1 + 2\sqrt{1 + 3\sqrt{1 + 4 \cdots + n\sqrt{1+x}}}}, \quad n \in \mathbf{N},\ x > -1$$

(pro $n = 1$ je $f(1,x) = \sqrt{1+x}$). Experimentálně určete hodnotu výrazu

$$\sqrt{1 + 2\sqrt{1 + 3\sqrt{1 + 4\cdots}}}$$

(je to limita $f(n, 0)$ pro $n \to \infty$; Mathematica tuto limitu nezvládne vypočítat, dá se ale uhodnout sestavením seznamu přibližných hodnot $f(n, 0)$).