Banzhafův index
a dvoustupňové hlasovací systémy

Antonín Slavík, Praha

Abstrakt. V textu představíme tzv. Banzhafův index, který umožňuje kvantifikovat sílu voliče v předepsaném hlasovacím systému. Definice indexu je zcela elementární, podrobnější zkoumání jeho vlastností však vede k zajímavé a hlubší matematice. Výklad je ilustrován řadou konkrétních příkladů ze světa politiky; uvidíme, že díky Banzhafovu indexu se matematika dostala i na stránky novin.

1. Hlasovací systémy

Představme si situaci, kdy jistá konečná množina voličů V má za úkol rozhodnout, zda podpoří či nepodpoří jistý návrh. Může se jednat např. o obyvatele nějakého státu v průběhu referenda, o poslance či senátory hlasující o návrhu zákona, případně o skupinu států sdružených v mezinárodní organizaci, která rozhoduje o přijetí jistého usnesení. Nejjednodušší způsob hlasování představuje většinový systém, ve kterém je vyžadována podpora nadpoloviční většiny voličů. V řadě případů je však tento systém nevhodný; například při hlasování v mezinárodních organizacích je běžné, že státy s velkým počtem obyvatel disponují větší váhou hlasu než malé státy. Ukážeme si jednoduchý způsob, jak matematicky popsat různé způsoby hlasování.

Množinu všech voličů, kteří podporují předložený návrh, budeme nazývat *koalice*; množina všech možných koalic je tedy potenční množina $\mathcal{P}(V)$. *Hlasovací systém*[1] na množině V je funkce $f : \mathcal{P}(V) \to \{0,1\}$, která každé koalici $K \subset V$ přiřadí hodnotu 0 nebo 1. V případě $f(K) = 0$ není předložený návrh schválen a koalice K se nazývá *prohrávající*, pro $f(K) = 1$ je návrh přijat a koalice K se nazývá *vítězná*.

Obvykle se předpokládá, že funkce f vyhovuje následujícím požadavkům:

1. $f(V) = 1$ (koalice tvořená všemi voliči je vítězná).
2. $f(\emptyset) = 0$ (prázdná koalice je prohrávající).
3. Pokud $K \subset L$ a $f(K) = 1$, pak $f(L) = 1$ (zvětšíme-li vítěznou koalici, pak zůstane vítězná).
4. Pokud $f(K) = 1$, pak $f(V \setminus K) = 0$ (doplněk vítězné koalice je prohrávající koalice).

[1] V teorii her se obvykle používá termín hlasovací hra, volební hra, případně koaliční hra. Jedná se o speciální případ tzv. kooperativní hry více hráčů, kteří odpovídají prvkům množiny V.

Doc. RNDr. Antonín Slavík, Ph.D., Matematicko-fyzikální fakulta UK, Sokolovská 83, 186 75 Praha 8 – Karlín, e-mail: slavik@karlin.mff.cuni.cz

Uveďme příklady některých v praxi používaných hlasovacích systémů.

Příklad 1. Ve *většinovém volebním systému* má každý volič jeden hlas, ke schválení návrhu je potřeba nadpoloviční většina hlasů. Příslušný hlasovací systém je tedy funkce $f : \mathcal{P}(V) \to \{0, 1\}$, kde pro každou koalici $K \subset V$ platí

$$f(K) = \begin{cases} 1 & \text{pokud } |K| > |V|/2, \\ 0 & \text{pokud } |K| \le |V|/2. \end{cases}$$

Příklad 2. Před zavedením přímé volby byl prezident České republiky volen parlamentem. Ke zvolení kandidáta v prvním nebo ve druhém kole bylo zapotřebí, aby získal hlasy nadpoloviční většiny všech poslanců a zároveň nadpoloviční většiny všech senátorů. Tento typ *dvoukomorového hlasovacího systému* můžeme formálně popsat následujícím způsobem: Položíme $V = P \cup S$, kde P je množina všech poslanců a S množina všech senátorů. Hlasovací systém je pak funkce $f : \mathcal{P}(V) \to \{0, 1\}$, kde pro každou koalici $K \subset V$ platí

$$f(K) = \begin{cases} 1 & \text{pokud } |K \cap P| > |P|/2 \text{ a zároveň } |K \cap S| > |S|/2, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Příklad 3. V *systému váženého hlasování* mají všichni voliči $v_1, \dots, v_n$ přidělené váhy $w_1, \dots, w_n \in [0, \infty)$. Dále je předepsána kvóta q splňující $w/2 < q \le w$, kde $w = w_1 + \dots + w_n$. Ke schválení libovolného návrhu je zapotřebí koalice voličů, kde součet vah jejích členů je větší nebo roven q. Příslušný hlasovací systém je tedy funkce $f : \mathcal{P}(V) \to \{0, 1\}$, kde pro každou koalici $K \subset V$ platí

$$f(K) = \begin{cases} 1 & \text{pokud } \sum\limits_{i;\, v_i \in K} w_i \ge q, \\ 0 & \text{pokud } \sum\limits_{i;\, v_i \in K} w_i < q. \end{cases}$$

V případě $w_1 = \dots = w_n = 1$ a $q = (n + 1)/2$ se systém váženého hlasování redukuje na většinový volební systém.

Systém váženého hlasování se používá např. v německém Bundesratu. Jednotlivé spolkové země mají odlišné počty hlasů v závislosti na počtech obyvatel. Země s více než 6 miliony obyvatel (Bádensko-Württembersko, Bavorsko, Dolní Sasko, Severní Porýní-Vestfálsko) mají po šesti hlasech, země s více než 5 miliony obyvatel (Hesensko) mají po pěti hlasech, země s více než 2 miliony obyvatel (Berlín, Braniborsko, Porýní-Falc, Sasko, Sasko-Anhaltsko, Šlesvicko-Holštýnsko, Durynsko) mají po čtyřech hlasech a všechny ostatní země (Brémy, Hamburk, Meklenbursko-Přední Pomořansko, Sársko) po třech hlasech. Zástupci každé země musejí hlasovat vždy jednotně. Prakticky to znamená, že v Bundesratu jsou zastoupeny čtyři státy s váhou 6, jeden stát s váhou 5, sedm států s váhou 4 a čtyři státy s váhou 3. Součet těchto vah činí 69, hlasovací kvóta je obvykle 35 (v případě ústavních zákonů 46). Všimněme si, že váhy spolkových zemí nejsou přímo úměrné počtům jejich obyvatel – v přepočtu na jednoho obyvatele mají větší státy méně hlasů. Zvolené váhy představují jistý kompromis mezi dvěma protichůdnými požadavky – rovnocenností všech zemí a rovnocenností všech obyvatel federace. Podobný problém je potřeba řešit i v mezinárodních organizacích, jako je např. Evropská unie.

Příklad 4. V letech 2007–2013 byla Evropská unie tvořena 27 státy. Při hlasování v Radě EU se tehdy uplatňoval komplikovaný systém zakotvený v tzv. Niceské smlouvě, který bývá označován jako *systém trojí většiny*. Všem státům byly na základě politické dohody přiděleny váhy podle tabulky 1. Váhy nejsou přímo úměrné počtům obyvatel jednotlivých států (např. Polsko disponuje téměř stejnou vahou jako Německo, které má ovšem více než dvojnásobek obyvatel), platí však, že lidnatější státy mají větší váhu. K přijetí rozhodnutí v Radě EU bylo zapotřebí, aby je podpořila koalice splňující následující tři podmínky:

1. Koalici tvoří nadpoloviční většina států (tj. aspoň 14 z 27 států).
2. Součet vah států v koalici je aspoň 255 (to je zhruba 74 % z celkového součtu vah, který činí 345).
3. Státy v koalici reprezentují aspoň 62 % obyvatel EU.[2]

Formálně lze tento hlasovací systém popsat následujícím způsobem: Množina voličů V je tvořena státy $v_1, \dots, v_{27}$. Nechť $w_1, \dots, w_{27}$ značí jejich váhy (viz tabulku 1), $p_1, \dots, p_{27}$ počty jejich obyvatel a $p = p_1 + \dots + p_{27}$ celkový počet obyvatel EU. V hlasovacím systému $f : \mathcal{P}(V) \to \{0,1\}$ pak pro každou koalici $K \subset V$ platí

$$f(K) = \begin{cases} 1 & \text{pokud } |K| > |V|/2, \displaystyle\sum_{i;\, v_i \in K} w_i \geq 255 \text{ a zároveň } \displaystyle\sum_{i;\, v_i \in K} p_i \geq 0{,}62p, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

V současnosti je tento způsob hlasování nahrazen jednodušším systémem zakotveným v tzv. Lisabonské smlouvě; k tomuto tématu se ještě vrátíme v závěru článku.

2. Banzhafův index voliče

Naším dalším cílem je kvantifikovat sílu voliče v daném hlasovacím systému. Nejprve zavedeme některá označení. Nechť $v \in V$ je libovolný volič a $f : \mathcal{P}(V) \to \{0,1\}$ hlasovací systém. Symbolem $\mathcal{K}^+(v,f)$ označíme množinu všech prohrávajících koalic, které se po přidání voliče v stanou vítěznými. Podobně symbolem $\mathcal{K}^-(v,f)$ označíme množinu všech vítězných koalic, které se po odebrání voliče v stanou prohrávajícími. Platí tedy

$$\mathcal{K}^+(v,f) = \{K \subset V;\ f(K) = 0, f(K \cup \{v\}) = 1\},$$
$$\mathcal{K}^-(v,f) = \{K \subset V;\ f(K) = 1, f(K \setminus \{v\}) = 0\}.$$

Velikosti těchto množin můžeme vyjádřit následujícím způsobem:

$$|\mathcal{K}^+(v,f)| = \sum_{K \subset V} \big(f(K \cup \{v\}) - f(K)\big) \tag{1}$$

$$|\mathcal{K}^-(v,f)| = \sum_{K \subset V} \big(f(K) - f(K \setminus \{v\})\big) \tag{2}$$

[2]Tento požadavek v praxi znamenal, že Německo v koalici se dvěma dalšími státy z trojice Francie, Spojené království a Itálie mohlo zablokovat jakýkoliv návrh.

Stát	**Obyvatelstvo**	**Váha**
Německo	16,5 %	29
Francie	12,9 %	29
Spojené království	12,4 %	29
Itálie	12,0 %	29
Španělsko	9,0 %	27
Polsko	7,6 %	27
Rumunsko	4,3 %	14
Nizozemsko	3,3 %	13
Řecko	2,2 %	12
Portugalsko	2,1 %	12
Belgie	2,1 %	12
Česká republika	2,1 %	12
Maďarsko	2,0 %	12
Švédsko	1,9 %	10
Rakousko	1,7 %	10
Bulharsko	1,5 %	10
Dánsko	1,1 %	7
Slovensko	1,1 %	7
Finsko	1,1 %	7
Irsko	0,9 %	7
Litva	0,7 %	7
Lotyšsko	0,5 %	4
Slovinsko	0,4 %	4
Estonsko	0,3 %	4
Kypr	0,2 %	4
Lucembursko	0,1 %	4
Malta	0,1 %	3

Tabulka 1 Členské státy Evropské unie, jejich počty obyvatel (v procentech z celkové populace EU) a váhy podle smlouvy z Nice. Údaje převzaty ze stránky `https://en.wikipedia.org/wiki/Voting_in_the_Council_of_the_European_Union`.

Všimněme si, že pokud $K \in \mathcal{K}^+(v,f)$, pak $K \cup \{v\} \in \mathcal{K}^-(v,f)$. Naopak, pokud $K \in \mathcal{K}^-(v,f)$, pak $K \setminus \{v\} \in \mathcal{K}^+(v,f)$. To znamená, že přidávání/odebírání prvku v představuje bijekci mezi množinami $\mathcal{K}^+(v,f)$, $\mathcal{K}^-(v,f)$ a platí $|\mathcal{K}^+(v,f)| = |\mathcal{K}^-(v,f)|$.

Označme ještě $\mathcal{K}(v,f) = \mathcal{K}^+(v,f) \cup \mathcal{K}^-(v,f)$; jde o množinu všech koalic, pro které je volič v klíčový – přidáním či odebráním v z dané koalice se změní výsledek hlasování. Zřejmě platí $|\mathcal{K}(v,f)| = 2|\mathcal{K}^+(v,f)| = 2|\mathcal{K}^-(v,f)|$.

Banzhafův index (síly) voliče $v \in V$ v hlasovacím systému f definujeme jako pravděpodobnost, že v je klíčovým voličem pro náhodně zvolenou koalici $K \subset V$. Označíme-li tento index symbolem $b(v,f)$, pak platí

$$b(v,f) = \frac{|\mathcal{K}(v,f)|}{2^{|V|}} = \frac{|\mathcal{K}^+(v,f)|}{2^{|V|-1}} = \frac{|\mathcal{K}^-(v,f)|}{2^{|V|-1}}. \tag{3}$$

Z definice je zřejmé, že platí $0 \leq b(v, f) \leq 1$. Uveďme jednoduchý příklad, který ukazuje, že Banzhafův index voliče nemusí vždy korespondovat s váhou jeho hlasu.

Příklad 5. Uvažujme akciovou společnost se třemi akcionáři, jejichž podíly činí 49 %, 49 % a 2 %. Při hlasování na valné hromadě je zapotřebí souhlas akcionářů s nadpolovičním podílem. Jaké jsou Banzhafovy indexy jednotlivých akcionářů?

Popsaná situace odpovídá systému váženého hlasování s tříprvkovou množinou voličů $V = \{v_1, v_2, v_3\}$ a váhami $w_1 = w_2 = 49$, $w_3 = 2$. Zřejmě platí, že koalice $K \subset V$ je vítězná, pokud je tvořena libovolnými dvěma nebo všemi třemi akcionáři. Prázdná koalice a všechny jednoprvkové koalice jsou prohrávající. V příslušném volebním systému $f : \mathcal{P}(V) \to \{0, 1\}$ tedy platí $f(K) = 1$ pro $|K| \geq 2$ a $f(K) = 0$ pro $|K| \leq 1$. Odtud snadno zjistíme, že

$$
\begin{aligned}
\mathcal{K}^+(v_1, f) &= \{\{v_2\}, \{v_3\}\}, \quad & \mathcal{K}^-(v_1, f) &= \{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}\}, \\
\mathcal{K}^+(v_2, f) &= \{\{v_1\}, \{v_3\}\}, \quad & \mathcal{K}^-(v_2, f) &= \{\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}\}, \\
\mathcal{K}^+(v_3, f) &= \{\{v_1\}, \{v_2\}\}, \quad & \mathcal{K}^-(v_3, f) &= \{\{v_1, v_3\}, \{v_2, v_3\}\}.
\end{aligned}
$$

Z definice plyne, že Banzhafův index každého ze tří akcionářů je roven 1/2.

Vidíme, že součet Banzhafových indexů jednotlivých voličů nemusí být roven jedné. Z tohoto důvodu se někdy zavádí tzv. *normalizovaný Banzhafův index voliče* $v \in V$ *v hlasovacím systému* f předpisem

$$\beta(v, f) = \frac{b(v, f)}{\sum_{w \in V} b(w, f)}.$$

Z této definice je zřejmé, že $0 \leq \beta(v, f) \leq 1$ a $\sum_{v \in V} \beta(v, f) = 1$. Například normalizované Banzhafovy indexy všech tří akcionářů z příkladu 5 jsou rovny 1/3. V tomto článku se normalizovanými indexy nebudeme dále zabývat.

Dále se pokusíme charakterizovat voliče s Banzhafovým indexem 0, resp. 1. Řekneme, že volič $v \in V$ je zbytečný, pokud nemůže ovlivnit výsledek žádného hlasování, tj. pokud pro každou koalici $K \subset V$ platí $f(K) = f(K \setminus \{v\})$. Opačným extrémem jsou tzv. diktátoři. Volič $v \in V$ je diktátor, pokud jeho přítomnost či nepřítomnost v koalici automaticky určuje výsledek hlasování, tj. pro každou koalici $K \subset V$ platí $f(K) = 1$, právě když $v \in K$. Snadno si rozmyslíme, že v je diktátor, právě když všichni ostatní voliči jsou zbyteční.

Věta 6. *Je-li* $f : \mathcal{P}(V) \to \{0, 1\}$ *hlasovací systém, pak pro každého voliče* $v \in V$ *platí následující tvrzení:*

1. *v je zbytečný, právě když* $b(v, f) = 0$.
2. *v je diktátor, právě když* $b(v, f) = 1$.

Důkaz. Rovnost $b(v, f) = 0$ je ekvivalentní s rovností $\mathcal{K}^-(v, f) = \emptyset$. Ta podle vztahu (2) platí právě tehdy, když $f(K) = f(K \setminus \{v\})$ pro každou koalici $K \subset V$, tj. právě když v je zbytečný.

Rovnost $b(v, f) = 1$ je ekvivalentní s rovností $|\mathcal{K}^-(v, f)| = 2^{|V|-1}$. Protože každá koalice v množině $\mathcal{K}^-(v, f)$ nutně obsahuje voliče v, poslední rovnost platí právě tehdy, když je množina $\mathcal{K}^-(v,f)$ tvořena všemi $2^{|V|-1}$ koalicemi obsahujícími voliče v. To je ekvivalentní s tvrzením, že pro každou koalici $K \subset V$ obsahující v platí $f(K) = 1$ a $f(K \setminus \{v\}) = 0$. To je však jen jiné vyjádření skutečnosti, že v je diktátor. $\square$

Další příklad ukazuje, že zbyteční voliči se občas vyskytují i v reálných hlasovacích systémech.

Příklad 7. Předchůdcem dnešní Evropské unie bylo Evropské hospodářské společenství (EHS), které vzniklo roku 1958. Zakládajícími členy EHS byly Francie, Itálie, Německo a státy Beneluxu. Při hlasování v EHS se v letech 1958 až 1973 (kdy došlo k rozšíření společenství) používal systém váženého hlasování s váhami uvedenými v tabulce 2.

Stát	**Váha**
Belgie	2
Francie	4
Itálie	4
Lucembursko	1
Německo	4
Nizozemsko	2

Tabulka 2 Váhy hlasů zakládajících členů Evropského hospodářského společenství.

Součet všech vah je 17, k přijetí usnesení byla stanovena kvóta 12. Aniž bychom počítali Banzhafovy indexy jednotlivých států (učiníme tak později v příkladu 9), snadno zjistíme, že Lucembursko je v tomto systému zbytečný volič. K dosažení kvóty jsou totiž potřeba buď hlasy všech tří velkých států, nebo hlasy dvou velkých a dvou středních států. Ať už Lucembursko hlasuje jakkoliv, výsledek hlasování nemůže ovlivnit.

Banzhafův index je pojmenován na počest právníka Johna F. Banzhafa, který roku 1964 upozornil na nespravedlivý hlasovací systém v okrese Nassau amerického státu New York [1]. Okres byl tvořen šesti volebními obvody s váhami 31, 31, 28, 21, 2, 2; jejich součet je 115, hlasovací kvóta byla stanovena na 58. Podobně jako v příkladu 7 není těžké zjistit, že tři nejmenší volební obvody nemohly ovlivnit výsledek žádného hlasování, tj. měly nulové Banzhafovy indexy. Po vleklých sporech americké soudy uznaly Banzhafův argument; v 90. letech 20. století došlo v okrese Nassau nejprve k přepočítání vah a později k přerozdělení volebních obvodů a přechodu na většinový volební systém.[3]

V systému váženého hlasování může být výpočet Banzhafova indexu přímo z definice poměrně obtížný; k tomuto tématu se vrátíme v další části textu. V případě většinového volebního systému se naproti tomu jedná o přímočarý výpočet.

Příklad 8. Uvažujme n-prvkovou množinu voličů V, kteří se řídí většinovým hlasovacím systémem f. Ze symetrie je zřejmé, že všichni voliči mají stejný Banzhafův index. Jaká je jeho hodnota?

[3] S myšlenkou kvantifikovat sílu voliče pomocí počtu koalic, ve kterých má rozhodující hlas, přišel již dříve Lionel S. Penrose [17], otec známého fyzika a matematika Rogera Penrose. Proto se někdy používá název Penroseův-Banzhafův index.

Nechť v je libovolný volič. Pak $K \in \mathcal{K}^-(v,f)$, právě když $|K| > n/2$ a zároveň $|K \setminus \{v\}| \leq n/2$. Vyšetříme zvlášť případy, kdy n je liché, resp. sudé.

Je-li n liché, pak $K \in \mathcal{K}^-(v,f)$ právě tehdy, když $v \in K$ a zároveň $|K| = (n+1)/2$. Počet takových koalic je

$$|\mathcal{K}^-(v,f)| = \binom{n-1}{\frac{n-1}{2}},$$

odkud dostáváme Banzhafův index

$$b(v,f) = \frac{|\mathcal{K}^-(v,f)|}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^{n-1}}\binom{n-1}{\frac{n-1}{2}}. \tag{4}$$

Je-li naopak n sudé, pak $K \in \mathcal{K}^-(v,f)$, právě když $v \in K$ a zároveň $|K| = n/2 + 1$. Počet takových koalic je

$$|\mathcal{K}^-(v,f)| = \binom{n-1}{\frac{n}{2}},$$

odkud dostáváme Banzhafův index

$$b(v,f) = \frac{|\mathcal{K}^-(v,f)|}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^{n-1}}\binom{n-1}{\frac{n}{2}}. \tag{5}$$

Lepší představu o hodnotě Banzhafova indexu získáme, jestliže přepíšeme kombinační čísla ve vztazích (4), (5) pomocí faktoriálů a použijeme Stirlingův vzorec

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n.$$

(Připomeňme, že zápis $f(n) \sim g(n)$ znamená $\lim_{n\to\infty} f(n)/g(n) = 1$.) V obou případech dojdeme ke stejnému výsledku

$$b(v,f) \sim \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi n}}.$$

Dospěli jsme tedy k překvapivému zjištění, že v limitě je Banzhafův index každého voliče ve většinovém systému nepřímo úměrný odmocnině z počtu voličů.

3. Výpočet Banzhafova indexu

Ruční výpočet Banzhafova indexu může být dost pracný, v případě velkého počtu voličů téměř neproveditelný.[4] Jak bychom jej implementovali na počítači?

Omezíme se zde na jednoduchý případ systému váženého hlasování s n-prvkovou množinou voličů $V = \{1,\dots,n\}$, váhami hlasů $w_1,\dots,w_n$ a kvótou q. Definujeme-li váhu libovolné koalice $K \subset V$ předpisem

$$w(K) = \sum_{i \in K} w_i,$$

pak v tomto hlasovacím systému platí $f(K) = 1$, právě když $w(K) \geq q$.

[4] Pro čtenáře se zájmem o teoretickou informatiku uveďme následující výsledky: 1) Výpočet Banzhafova indexu jednoho voliče je NP-těžký a #P-úplný problém. 2) Otázka, zda Banzhafův index jednoho voliče je kladný, je NP-úplný problém. Podrobnosti lze najít v [13], [14].

Chceme-li vypočítat Banzhafovy indexy všech voličů, můžeme postupovat podle definice (3):

1. Pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ položíme $b_i := 0$.

2. Projdeme všechny koalice $K \subset V$, pro každou z nich vypočteme její váhu $w(K)$. Pokud $w(K) \geq q$, pak pro každé $i \in V$ splňující $w(K \setminus \{i\}) < q$ položíme $b_i := b_i + 1$.

3. Po skončení přechozího kroku platí $b_i = |\mathcal{K}^-(i, f)|$ pro každé $i \in V$. Banzhafovy indexy všech voličů $i \in V$ vypočteme ze vztahu $b(i, f) = b_i / 2^{n-1}$.

Časová složitost tohoto algoritmu je $O(n^2 2^n)$, neboť procházíme 2^n koalic K a výpočet $w(K \setminus \{i\})$ pro všechna možná i zabere čas $O(n^2)$.

Ukážeme si jiný postup, který je efektivnější. Lze jej použít tehdy, když váhy $w_1, \dots, w_n$ a kvóta q jsou přirozená čísla.[5]

Pro každou množinu $I \subset V$ a číslo $j \in \mathbb{Z}$ označíme symbolem $a_I(j)$ počet koalic $K \subset I$ takových, že $w(K) = j$. Protože váha hlasu voliče i je w_i, množina $\mathcal{K}^+(i, f)$ je tvořena všemi koalicemi K, kde $i \notin K$ a $q - w_i \leq w(K) \leq q - 1$. Pokud bychom znali hodnoty $a_{V \setminus \{i\}}(j)$ pro $j \in \{q - w_i, \dots, q - 1\}$, mohli bychom vypočítat Banzhafův index voliče i ze vzorce

$$b(i, f) = \frac{|K^+(i, f)|}{2^{n-1}} = \frac{\sum_{j=q-w_i}^{q-1} a_{V \setminus \{i\}}(j)}{2^{n-1}}. \tag{6}$$

K výpočtu požadovaných hodnot $a_{V \setminus \{i\}}(j)$ budeme potřebovat vztah

$$a_{V \setminus \{i\}}(j) = a_V(j) - a_{V \setminus \{i\}}(j - w_i), \quad i \in \{1, \dots, n\}, \quad j \in \mathbb{Z}, \tag{7}$$

který je důsledkem rovnosti

$$a_V(j) = a_{V \setminus \{i\}}(j) + a_{V \setminus \{i\}}(j - w_i), \quad i \in \{1, \dots, n\}, \quad j \in \mathbb{Z}$$

(koalice $K \subset V$ má váhu j, pokud je podmnožinou $V \setminus \{i\}$ a má váhu j, nebo je tvořena voličem i s váhou w_i a podmnožinou $V \setminus \{i\}$ s váhou $j - w_i$). Dále si uvědomíme, že

$$a_\emptyset(j) = \begin{cases} 1 & \text{pro } j = 0, \\ 0 & \text{pro } j \neq 0, \end{cases} \tag{8}$$

$$a_{\{1,\dots,k\}}(j) = a_{\{1,\dots,k-1\}}(j) + a_{\{1,\dots,k-1\}}(j - w_k), \quad j \in \mathbb{Z}, \quad k \in \{1, \dots, n\} \tag{9}$$

(každá koalice $K \subset \{1, \dots, k\}$ s váhou j je buď podmnožinou $\{1, \dots, k-1\}$, nebo je tvořena voličem k s váhou w_k a podmnožinou $\{1, \dots, k-1\}$ s váhou $j - w_k$).

Algoritmus pro výpočet Banzhafových indexů tedy může fungovat následovně:

1. Sestavíme posloupnost hodnot $\{a_\emptyset(j)\}_{j=0}^{q-1}$ podle vztahu (8).

[5] Tento předpoklad není v praxi příliš omezující. Pokud jsou váhy a kvóta racionální čísla, můžeme je vynásobit vhodnou konstantou a získat tak přirozená čísla; hlasovací systém se touto operací nezmění.

2. Pro $k = 1, \dots, n$ použijeme dříve získanou posloupnost $\{a_{\{1,\dots,k-1\}}(j)\}_{j=0}^{q-1}$ a rekurentní vztah (9) k výpočtu posloupnosti $\{a_{\{1,\dots,k\}}(j)\}_{j=0}^{q-1}$. Pokud $j - w_k < 0$, pak druhý sčítanec na pravé straně (9) je nulový. Po skončení této části výpočtu známe hodnoty $\{a_V(j)\}_{j=0}^{q-1}$.

3. Pro $i = 1, \dots, n$ použijeme dříve získanou posloupnost $\{a_V(j)\}_{j=0}^{q-1}$ a rekurentní vztah (7) k výpočtu posloupnosti $\{a_{V\setminus\{i\}}(j)\}_{j=0}^{q-1}$. Pokud $j - w_i < 0$, pak druhý člen na pravé straně (7) je nulový. Následně vypočteme Banzhafův index $b(i, f)$ podle vzorce (6).

První krok algoritmu zabere čas $O(q)$, druhý krok $O(nq)$, třetí krok rovněž $O(nq)$. Celková časová složitost algoritmu je proto $O(nq)$, jedná se tedy o tzv. pseudopolynomiální algoritmus (časová složitost je polynomiální vzhledem ke q, ale exponenciální vzhledem k délce zápisu čísla q ve dvojkové soustavě). Výpočet hodnot $\{a_V(j)\}_{j=0}^{q-1}$ ve druhém kroku algoritmu je příkladem techniky známé pod názvem dynamické programování.

Podívejme se na problém výpočtu Banzhafových indexů ještě z jiného úhlu. Připomeňme, že generující funkce libovolné reálné posloupnosti $\{a_j\}_{j=0}^{\infty}$ je definována jako mocninná řada $A(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j$. Generující funkce posloupnosti $\{a_V(j)\}_{j=0}^{\infty}$ je tedy

$$A_V(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_V(j) x^j.$$

Kromě toho však také platí

$$A_V(x) = (1 + x^{w_1})(1 + x^{w_2}) \cdots (1 + x^{w_n}).$$

Roznásobíme-li totiž polynom na pravé straně, pak j-tou mocninu x obdržíme tolikrát, kolik existuje podmnožin množiny $\{w_1, \dots, w_n\}$ se součtem j, což přesně odpovídá počtu všech koalic s váhou j.

Podobně pro generující funkci posloupnosti $\{a_{V\setminus\{i\}}(j)\}_{j=0}^{\infty}$ platí

$$A_{V\setminus\{i\}}(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_{V\setminus\{i\}}(j) x^j = \prod_{\substack{k\in\{1,\dots,n\},\\ k\neq i}} (1 + x^{w_k}). \tag{10}$$

Toho lze využít, máme-li např. k dispozici vhodný počítačový program umožňující násobení polynomů: Sestavíme polynom na pravé straně vztahu (10), jeho roznásobením získáme hodnoty $\{a_{V\setminus\{i\}}(j)\}_{j=0}^{\infty}$ a vypočteme Banzhafův index $b(i, f)$ podle vzorce (6).

Příklad 9. Vraťme se k příkladu 7, kde je dáno $n = 6$ států Evropského hospodářského společenství. Váhy jejich hlasů jsou $w_1 = 2$ (Belgie), $w_2 = 4$ (Francie), $w_3 = 4$ (Itálie), $w_4 = 1$ (Lucembursko), $w_5 = 4$ (Německo), $w_6 = 2$ (Nizozemsko). Kvóta pro přijetí usnesení je $q = 12$.

Dosazením $i = 1$ do vztahu (10) a roznásobením obdržíme

$$A_{V\setminus\{1\}}(x) = (1 + x^4)(1 + x^4)(1 + x^1)(1 + x^4)(1 + x^2) = 1 + x + x^2 + x^3 +$$
$$+ 3x^4 + 3x^5 + 3x^6 + 3x^7 + 3x^8 + 3x^9 + 3x^{10} + 3x^{11} + x^{12} + x^{13} + x^{14} + x^{15}.$$

Koeficienty tohoto polynomu jsou čísla $\{a_{V\setminus\{1\}}(j)\}_{j=0}^{\infty}$. Ze vzorce (6) získáme Banzhafův index Belgie

$$b(1,f) = \frac{3+3}{2^5} = \frac{3}{16}.$$

Stejný Banzhafův index má i Nizozemsko. Volbou $i = 2$ obdržíme

$$A_{V\setminus\{2\}}(x) = (1+x^2)(1+x^4)(1+x^1)(1+x^4)(1+x^2) = 1 + x + 2x^2 + 2x^3 + \\ +3x^4 + 3x^5 + 4x^6 + 4x^7 + 3x^8 + 3x^9 + 2x^{10} + 2x^{11} + x^{12} + x^{13},$$

a tedy Banzhafův index Francie je

$$b(2,f) = \frac{3+3+2+2}{2^5} = \frac{5}{16}.$$

Stejný Banzhafův index mají také Itálie a Německo. Z příkladu 7 víme, že Lucembursko je zbytečný volič; podle věty 6 je jeho Banzhafův index nulový.

Existuje řada dalších algoritmů pro výpočet přesné či přibližné hodnoty Banzhafova indexu v systému váženého hlasování; viz např. [9], [11], [13]. Na webové stránce [12] si čtenář může sám vyzkoušet několik programů pro výpočet Banzhafova indexu.

V praxi se často vyskytují i složitější hlasovací systémy, které lze popsat následujícím způsobem: Nechť $f_1, \ldots, f_n : \mathcal{P}(V) \to \{0,1\}$ jsou hlasovací systémy se společnou množinou voličů V. Jejich průnikem je systém $f_1 \wedge \cdots \wedge f_n : \mathcal{P}(V) \to \{0,1\}$, kde pro každou koalici $K \subset V$ platí

$$(f_1 \wedge \cdots \wedge f_n)(K) = \min(f_1(K), \ldots, f_n(K)).$$

Koalice K je tedy vítězná v systému $f_1 \wedge \cdots \wedge f_n$, právě když je vítězná ve všech systémech $f_1, \ldots, f_n$. Například systém trojí většiny popsaný v příkladu 4 je průnikem tří jednodušších systémů na množině členských států EU: většinového systému a dvou systémů váženého hlasování (v jednom z nich jsou váhy dány tabulkou 1, ve druhém jsou váhami počty obyvatel jednotlivých států). Pro výpočet Banzhafova indexu voličů v hlasovacích systémech, které jsou průnikem systémů váženého hlasování, je možné použít podobné metody jako ty, které jsme si představili výše; viz např. [2].

4. Dvoustupňové hlasovací systémy

Představme si, že je dáno n po dvou disjunktních skupin voličů $V_1, \ldots, V_n$, přičemž hlasování v i-té skupině V_i se řídí hlasovacím systémem $f_i : \mathcal{P}(V_i) \to \{0,1\}$. Pokud má množina všech voličů $V = V_1 \cup \cdots \cup V_n$ rozhodnout o jistém návrhu, je přirozené použít následující postup: Každá skupina V_i zvolí svého reprezentanta r_i, čímž vznikne množina $R = \{r_1, \ldots, r_n\}$. Reprezentanti poté hlasují již jen mezi sebou pomocí vhodného hlasovacího systému $g : \mathcal{P}(R) \to \{0,1\}$. Každý reprezentant r_i se přitom řídí názorem skupiny V_i, tj. pokud návrh podporují voliči $K \subset V$, pak pro něj v množině reprezentantů hlasuje koalice $\{r_i \in R;\ f_i(K \cap V_i) = 1\}$.

Tento proces odpovídá *dvoustupňovému hlasovacímu systému* $h : \mathcal{P}(V) \to \{0,1\}$, který je definován předpisem

$$h(K) = g(\{r_i \in R;\ f_i(K \cap V_i) = 1\}), \quad K \subset V.$$

O Banzhafových indexech voličů ve dvoustupňových systémech vypovídá následující věta, podle které je index voliče $v \in V_i$ ve dvoustupňovém systému h přímo úměrný jeho indexu v dílčím systému f_i. Pro jistou třídu systémů f_i dokonce platí silnější tvrzení: Banzhafův index voliče $v \in V_i$ ve dvoustupňovém systému h je součinem jeho indexu v systému f_i a indexu reprezentanta i-té skupiny v systému g.

Věta 10. *Nechť $h : \mathcal{P}(V) \to \{0,1\}$ je dvoustupňový hlasovací systém vzniklý složením systémů $f_i : \mathcal{P}(V_i) \to \{0,1\}$, $i \in \{1,\dots,n\}$, a $g : \mathcal{P}(R) \to \{0,1\}$. Pak platí následující tvrzení:*

1. *Existují konstanty $\kappa_1,\dots,\kappa_n$ takové, že pro libovolného voliče $v \in V_i$ platí*

$$b(v,h) = \kappa_i \cdot b(v,f_i).$$

2. *Jestliže navíc $f_i(K) + f_i(V_i \setminus K) = 1$ pro každé $i \in \{1,\dots,n\}$ a každou koalici $K \subset V_i$, pak pro libovolného voliče $v \in V_i$ platí*

$$b(v,h) = b(i,g) \cdot b(v,f_i).$$

Podmínka ve druhé části věty říká, že pro každou volbu $K \subset V_i$ je právě jedna z koalic K a $V_i \setminus K$ vítězná v systému f_i. V praxi to znamená, že f_i nepřipouští remízy. Např. většinový hlasovací systém tuto podmínku splňuje právě tehdy, když počet voličů je lichý.

Důkaz věty 10 je technicky poněkud komplikovaný, naznačíme však hlavní myšlenku. Uvažujme nejprve libovolný hlasovací systém $f : \mathcal{P}(V) \to \{0,1\}$ s množinou voličů $V = \{v_1,\dots,v_n\}$. Funkce $F : [0,1]^n \to \mathbb{R}$ definovaná předpisem

$$F(x_1,\dots,x_n) = \sum_{K \subset V} \left(\prod_{j;\, v_j \in K} x_j \right) \left(\prod_{j;\, v_j \in V \setminus K} (1 - x_j) \right) f(K), \quad x_1,\dots,x_n \in [0,1],$$

se nazývá *multilineární rozšíření* funkce f. Tento název je motivován dvěma vlastnostmi, které plynou přímo z definice F:

1. F je lineární funkce v každé proměnné x_i, $i \in \{1,\dots,n\}$.
2. Zvolíme-li libovolnou koalici $K \subset V$ a definujeme vektor $x^K \in \mathbb{R}^n$ předpisem

$$x_i^K = \begin{cases} 1 & \text{pokud } v_i \in K, \\ 0 & \text{pokud } v_i \in V \setminus K, \end{cases}$$

   pak $F(x^K) = f(K)$.

Druhá vlastnost znamená, že hodnoty funkce f odpovídají hodnotám multilineárního rozšíření v rozích n-rozměrné krychle $[0,1]^n$. Lze dokázat, že funkce F je vlastnostmi 1 a 2 určena jednoznačně; viz [16, str. 268–269].

Známe-li funkci F, můžeme Banzhafovy indexy jednotlivých voličů vypočítat pomocí následujícího tvrzení.

Lemma 11. *Nechť $F : [0,1]^n \to \mathbb{R}$ je multilineární rozšíření hlasovacího systému $f : \mathcal{P}(V) \to \{0,1\}$ s množinou voličů $V = \{v_1, \dots, v_n\}$. Pak platí*

$$b(v_i, f) = \frac{\partial F}{\partial x_i}(1/2, \dots, 1/2), \quad i \in \{1, \dots, n\}.$$

Důkaz. Nechť $K \subset V$ je libovolná koalice. Pokud $v_i \in K$, pak

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\prod_{j;\, v_j \in K} x_j\right)\left(\prod_{j;\, v_j \in V\setminus K}(1-x_j)\right) = \left(\prod_{j;\, v_j \in K\setminus\{v_i\}} x_j\right)\left(\prod_{j;\, v_j \in V\setminus K}(1-x_j)\right)$$

a hodnota tohoto součinu pro $x_1 = \cdots = x_n = 1/2$ je $(1/2)^{n-1}$. Je-li naopak $v_i \in V\setminus K$, pak

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\prod_{j;\, v_j \in K} x_j\right)\left(\prod_{j;\, v_j \in V\setminus K}(1-x_j)\right) = -\left(\prod_{j;\, v_j \in K} x_j\right)\left(\prod_{j;\, v_j \in V\setminus(K\cup\{v_i\})}(1-x_j)\right)$$

a hodnota tohoto součinu pro $x_1 = \cdots = x_n = 1/2$ je $-(1/2)^{n-1}$. Z definice F nyní plyne

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(1/2, \dots, 1/2) = \sum_{K\subset V,\, v_i \in K}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} f(K) - \sum_{K\subset V,\, v_i \in V\setminus K}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} f(K) =$$
$$= \frac{1}{2^{n-1}}\sum_{K\subset V}\left(f(K) - f(K\setminus\{v_i\})\right) = \frac{|\mathcal{K}^-(v,f)|}{2^{n-1}} = b(v_i, f),$$

čímž je tvrzení dokázáno. □

Vraťme se nyní k situaci z věty 10, kdy je dán dvoustupňový hlasovací systém $h : \mathcal{P}(V) \to \{0,1\}$ vzniklý složením systémů $f_i : \mathcal{P}(V_i) \to \{0,1\}$, $i \in \{1, \dots, n\}$, a $g : \mathcal{P}(R) \to \{0,1\}$, kde $R = \{r_1, \dots, r_n\}$ je množina reprezentantů. Pro práci s multilineárními rozšířeními potřebujeme ještě zvolit pevné pořadí voličů z množin $V_1, \dots, V_n, V$. Nejprve očíslujeme prvky množin $V_i = \{v_1^i, \dots, v_{m_i}^i\}$, $i \in \{1, \dots, n\}$, kde $m_i = |V_i|$. V množině $V = V_1 \cup \cdots \cup V_n$ poté zavedeme číslování $V = \{v_1, \dots, v_m\}$ tak, aby platilo

$$(v_1, \dots, v_m) = (v_1^1, \dots, v_{m_1}^1, v_1^2, \dots, v_{m_2}^2, \dots, v_1^n, \dots, v_{m_n}^n).$$

Nechť $H : [0,1]^m \to \mathbb{R}$, $F_i : [0,1]^{m_i} \to \mathbb{R}$, $G : [0,1]^n \to \mathbb{R}$ jsou multilineární rozšíření systémů h, f_i a g. Pak lze dokázat, že pro každé $x \in [0,1]^m$ platí

$$H(x_1, \dots, x_m) = G(F_1(x_1, \dots, x_{m_1}), \dots, F_n(x_{m-m_n+1}, \dots, x_m)). \tag{11}$$

Předchozí vzorec říká, že multilineární rozšíření dvoustupňového hlasovacího systému h získáme složením multilineárních rozšíření dílčích systémů f_i a g. Nebudeme jej dokazovat; viz např. [16, Theorem XII.2.9].[6]

[6] Vzhledem k jednoznačnosti multilineárního rozšíření stačí ověřit, že funkce na pravé straně vztahu (11) je lineární v každé proměnné a její hodnoty v rozích krychle $[0,1]^m$ odpovídají hodnotám hlasovacího systému h.

Vezmeme-li libovolného voliče $v \in V_i$, pak existuje $j \in \{1, \dots, m_i\}$ splňující $v = v_j^i$, a dále $k \in \{1, \dots, m\}$ splňující $v = v_k$. Derivováním vztahu (11) podle x_k a použitím lemmatu 11 dostaneme

$$\begin{aligned} b(v, h) &= \frac{\partial H}{\partial x_k}(1/2, \dots, 1/2) = \\ &= \frac{\partial G}{\partial x_i}(F_1(1/2, \dots, 1/2), \dots, F_n(1/2, \dots, 1/2)) \cdot \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(1/2, \dots, 1/2) = \\ &= \kappa_i b(v_j^i, f_i), \end{aligned}$$

kde $\kappa_i = \frac{\partial G}{\partial x_i}(F_1(1/2, \dots, 1/2), \dots, F_n(1/2, \dots, 1/2))$, což je první tvrzení věty 10.

Je-li splněn přepoklad druhého tvrzení věty 10, pak z definice multilineárního rozšíření dostáváme

$$F_i(1/2, \dots, 1/2) = \sum_{K \subset V} \left(\frac{1}{2}\right)^n f_i(K) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \sum_{K \subset V} f_i(K) = \left(\frac{1}{2}\right)^n 2^{n-1} = \frac{1}{2},$$

a proto

$$\kappa_i = \frac{\partial G}{\partial x_i}(1/2, \dots, 1/2) = b(i, g),$$

čímž je důkaz dokončen.

Věta 10 je důležitá z teoretického hlediska, má však i zajímavé praktické důsledky. Představme si dvoustupňový hlasovací systém $h : \mathcal{P}(V) \to \{0, 1\}$ vzniklý složením systémů $f_i : \mathcal{P}(V_i) \to \{0, 1\}$, $i \in \{1, \dots, n\}$, a $g : \mathcal{P}(R) \to \{0, 1\}$. Předpokládejme, že hlasovací systémy $f_1, \dots, f_n$ ve skupinách $V_1, \dots, V_n$ jsou pevně určeny a naším úkolem je navrhnout hlasovací systém g na množině reprezentantů R. Jak máme postupovat, aby byl výsledný dvoustupňový systém h spravedlivý z hlediska všech voličů z množiny $V = V_1 \cup \dots \cup V_n$? Mohli bychom zařídit, aby všichni voliči měli přibližně stejnou sílu vyjádřenou Banzhafovým indexem? Uvažujme nejjednodušší situaci, kdy $f_1, \dots, f_n$ jsou většinové hlasovací systémy. Z příkladu 8 víme, že Banzhafův index voliče $v \in V_i$ v hlasovacím systému f_i je nepřímo úměrný odmocnině z velikosti V_i. Podle druhé části věty 10 by pak Banzhafův index reprezentanta množiny V_i měl být přímo úměrný odmocnině z velikosti V_i.[7] Na tuto skutečnost upozornil roku 1946 Lionel S. Penrose [17]; na jeho počest se přidělování vah reprezentantům v závislosti na odmocnině z počtu voličů, které zastupují, nazývá *Penroseovou metodou* (někdy též *Penroseovým pravidlem druhé odmocniny*).

Roku 2007 začala Evropská unie diskutovat o změně složitého způsobu hlasování v Radě EU, který jsme popsali v příkladu 4. Členské státy se nakonec dohodly na novém systému, který je nyní zakotven v tzv. Lisabonské smlouvě. Pro přijetí usnesení v Radě EU je zapotřebí koalice splňující aspoň jednu z následujících podmínek:

[7] Aby byl splněn předpoklad druhé části věty 10, měli bychom požadovat, aby množiny $V_1, \dots, V_n$ měly lichý počet prvků – systémy $f_1, \dots, f_n$ pak nepřipouštějí remízu. Pokud však uvažujeme množiny s velkým počtem prvků (jinak bychom nemohli použít asymptotický odhad z příkladu 8), lze tento předpoklad vynechat, neboť pravděpodobnost remízy bude velmi malá (v limitě nulová).

1. V koalici je sdruženo aspoň 55 % států (tj. nejméně 16 z 28 států), které reprezentují aspoň 65 % obyvatel EU.

2. Koalice je tvořena aspoň 25 státy.

Druhá podmínka zajišťuje, že k zablokování usnesení jsou potřebné nejméně 4 státy (tzv. blokační menšina); nemůže se stát, že zablokování způsobí pouze 3 státy, i kdyby měly v součtu více než 35 % obyvatel EU.

Nový hlasovací systém tedy zohledňuje pouze počty států a počty jejich obyvatel. Oproti předchozímu systému váženého hlasování (viz příklad 4) se tak změnila hlasovací síla některých států. Zvlášť výrazně se změna dotkla např. Španělska a Polska; z tabulky 1 je zřejmé, že tyto státy měly ve starém systému větší váhu, než jaká odpovídá počtu jejich obyvatel. Není proto překvapivé, že změnám předcházela dlouhá a politicky složitá vyjednávání. Nejhlasitěji protestovalo Polsko, které prosazovalo výše zmíněnou Penroseovu metodu; polská delegace dorazila na summit EU s heslem „druhá odmocnina nebo smrt“. Matematika se tehdy objevila i na stránkách světových deníků, což jinak není příliš obvyklé. Například ve Financial Times se k tématu vyjádřili dva přední komentátoři; ocitujeme pro zajímavost úryvky z jejich textů. Gideon Rachman zaujal v článku *Square root of the EU's problems* [18] k polskému návrhu spíše skeptický postoj:

Of course, success at the summit is not guaranteed. The Poles are the likeliest spoilers. Their slogan for the summit – "the square root or death" – neatly combines obscurity, absurdity and vehemence, capturing the spirit of the modern EU. The Polish proposal is that when countries vote on European laws, their voting power should be a square root of their population – a plan that would sharply reduce Germany's power relative to Poland. Almost nobody else wants the baffling square root system, but the Poles have the power to block any agreement. . . . The awkward squad of Poland, Britain and the Czech Republic will be accused of putting the Union in danger. But the real long-term threat will be posed by those who insist that the EU must press ahead with "ever closer union", while blithely disregarding the increasingly obvious disenchantment of ordinary Europeans.

Wolfgang Münchau, který studoval matematiku, se v článku *Multiple answers to Europe's maths problem* [15] pokusil čtenářům objasnit, že polský návrh není tak obskurní, jak může na první pohled vypadat.[8] Kromě jiného napsal:

What is a fair voting system for the European Union? It looks as though, thanks to Poland, European leaders will be forced to debate this difficult question at their summit this week. Since the simplified draft treaty is substantively identical to the old and rejected constitution[9] *– minus some cosmetics – the voting system proposed is going to be the same one: passage of legislation requires a coalition of countries representing at least 55 per cent of the member states and 65 per cent of the population. The Poles have threatened a veto unless the second of those two numbers is based on the square root of the population size – to reduce Germany's influence. It sounds arbitrary, but the Poles have a point. Mathematics is on the side of Poland. To an uninitiated observer,*

[8] Münchauovy názory stručně shrnul Petr Zavadil v komentáři *O druhé odmocnině z Polska* [20], který vyšel v Lidových novinách.

[9] Hlasovací systém popsaný v Lisabonské smlouvě byl převzat z návrhu tzv. evropské ústavy, která byla zamítnuta při referendech ve Francii a v Nizozemsku.

this does not appear immediately obvious. Does it not seem fair that the voting power of a country in an international organisation should be proportional to its population size? The answer is no. In fact, it is totally unfair. The reason is that effective voting power in multi-nation settings such as the EU depends not on voting size but on the ability to form winning coalitions. Large countries are better placed than their relative population size would suggest.

Čtenáře se zájmem o detailnější srovnání hlasovacích systémů v Radě EU odkazujeme např. na text [8], kde lze najít hodnoty Banzhafových indexů členských států EU podle Niceské smlouvy, Lisabonské smlouvy a Penroseovy metody. Zajímavý je též starší článek [10] pocházející z odbobí, kdy EU měla pouze 15 členů. Autoři zde upozorňují, že není možné nalézt nejspravedlivější hlasovací systém, aniž bychom definovali, zda EU má být spíše společenstvím rovnocenných států, společenstvím rovnocenných občanů, nebo federálním státem nacházejícím se někde mezi oběma extrémy.

5. Závěr

Banzhafův index představuje velmi přirozený způsob, jak měřit sílu voliče v hlasovacím systému. Je však na místě upozornit, že v některých situacích se tento index může chovat poněkud překvapivě. Patrně nejznámější ukázkou je tzv. paradox nových členů [3]. Přidáme-li do systému váženého hlasování nového voliče, přičemž zachováme váhy ostatních voličů, očekávali bychom, že jejich síla vyjádřená Banzhafovým indexem poklesne. Paradox nových členů ukazuje, že může nastat opačná situace.

Uvažujme tříprvkovou množinu voličů s váhami hlasů $w_1 = 3$, $w_2 = 2$, $w_3 = 2$ a hlasovací kvótu odpovídající nadpoloviční většině, tj. $q = 4$. V této situaci mají všichni voliči stejný Banzhafův index 1/2. Co se stane, když do systému přidáme čtvrtého voliče s váhou hlasu $w_4 = 1$ a zároveň zvýšíme kvótu na nadpoloviční většinu, která nyní činí $q = 5$? Banzhafovy indexy čtyř voličů v novém systému jsou 5/8, 3/8, 3/8, 1/8. Vidíme, že přidáním čtvrtého voliče se Banzhafův index prvního voliče zvýšil! Čtenář může namítnout, že tento paradox je způsoben zvýšením kvóty. Zkusíme-li však vypočítat Banzhafovy indexy pro původní tříprvkovou množinu voličů a kvótu 5, obdržíme hodnoty 3/4, 1/4, 1/4. V tomto případě zjišťujeme, že přidáním čtvrtého voliče se zvýší Banzhafův index druhého a třetího voliče!

Pro zajímavost zmíníme ještě tzv. paradox přerozdělení hlasů [5]: V tříprvkovém systému voličů s váhami hlasů $w_1 = 55$, $w_2 = 35$, $w_3 = 10$ a kvótou 70 jsou Banzhafovy indexy rovny 1/2, 1/2, 0. Změníme-li váhy na $w_1 = 50$, $w_2 = 25$, $w_3 = 25$ a zachováme kvótu 70, pak nové Banzhafovy indexy budou 3/4, 1/4, 1/4. Vidíme, že index prvního voliče vzrostl, přestože se váha jeho hlasu snížila!

V teorii her existuje řada jiných způsobů, jak kvantifikovat sílu voličů v hlasovacím systému či obecněji hráčů v kooperativní hře. K nejznámějším patří Shapleyův-Shubikův index, Deeganův-Packelův index a Johnstonův index. Bohužel i tyto indexy jsou náchylné k některým paradoxům. Další informace lze dohledat např. v textech [4], [6], [7], [9], [16], [19].

L i t e r a t u r a

[1] Banzhaf, J. F.: *Weighted voting doesn't work: a mathematical analysis.* Rutgers Law Rev. 19 (1965), 317–343.

[2] Bilbao, J. M., Fernández, J. R., Jiménez, N., López, J. J.: *Voting power in the European Union enlargement.* European J. Oper. Res. 143 (2002), 181–196.

[3] Brams, S. J.: *Game theory and politics.* Dover Publications, Inc., 2004.

[4] Deegan, J., Packel, E. W.: *A new index of power for simple n-person games.* Internat. J. Game Theory 7 (1978), 113–123.

[5] Fischer, D., Schotter, A.: *The inevitability of the paradox of redistribution in the allocation of voting weights.* Public Choice 33 (1978), 49–67.

[6] Hykšová, M.: *Počátky teorie kooperativních her.* In J. Bečvář, M. Bečvářová (ed.), *Sborník 37. mezinárodní konference Historie matematiky*, Matfyzpress, Praha, 2016.

[7] Johnston, R. J.: *On the measurement of power: Some reactions to laver.* Environ. Plan. 10 (1978), 907–914.

[8] Kirsch, W.: *A mathematical view on voting and power.* In W. König (ed.), *Mathematics and Society*, European Mathematical Society, 2016, 251–279.

[9] de Keijzer, B.: *A survey on the computation of power indices.* Technical report, Delft University of Technology, 2008 [online], [cit. 25. 8. 2017]. Dostupné z: `http://homepages.cwi.nl/~keijzer/powerindexsurvey.pdf`

[10] Laruelle, A., Widgrén, M.: *Is the allocation of voting power among EU states fair?* Public Choice 94 (1998), 317–339.

[11] Leech, D.: *Computation of power indices.* Warwick Economic Research Papers, no. 644, The University of Warwick, 2002 [online], [cit. 25. 8. 2017]. Dostupné z: `http://www.warwick.ac.uk/fac/soc/economics/research/workingpapers/2008/twerp644.pdf`

[12] Leech, D., Leech, R.: *Computer Algorithms for Voting Power Analysis* [online], [cit. 5. 9. 2017]. Dostupné z: `http://homepages.warwick.ac.uk/~ecaae/`

[13] Matsui, T., Matsui, Y.: *A survey of algorithms for calculating power indices of weighted majority games.* J. Oper. Res. Soc. Japan 43 (2000), 71–86.

[14] Matsui, Y., Matsui, T.: *NP-completeness for calculating power indices of weighted majority games.* Theoret. Comput. Sci. 263 (2001), 305–310.

[15] Münchau, W.: *Multiple answers to Europe's maths problem.* Financial Times, 18. června 2007 [online], [cit. 25. 8. 2017]. Dostupné z: `https://goo.gl/X3p7zA`.

[16] Owen, G.: *Game Theory* (3rd edition). Academic Press, San Diego, 1995.

[17] Penrose, L. S.: *The elementary statistics of majority voting*, J. R. Stat. Soc. 109 (1946), 53–57.

[18] Rachman, G.: *Square root of the EU's problems.* Financial Times, 11. června 2007 [online], [cit. 25. 8. 2017]. Dostupné z: `https://goo.gl/hfyZvu`.

[19] Shapley, L. S., Shubik, M.: *A method for evaluating the distribution of power in a committee system.* Am. Political Sci. Rev. 48 (1954), 787-792.

[20] Zavadil, P.: *O druhé odmocnině z Polska.* Lidové noviny, 19. června 2007 [online], [cit. 25. 8. 2017]. Dostupné z: `https://goo.gl/XidrPJ`.