Hallova věta, její aplikace a historie

Antonín Slavík

Abstrakt. Hallova věta a její varianty patří k základním pilířům kombinatoriky. V textu představíme některé její klasické i méně známé aplikace. Popíšeme též ranou historii věty a příbuzných tvrzení, která je spojena nejen se jménem Philipa Halla, ale i řady dalších předních matematiků první poloviny 20. století.

1. Hallova věta a její varianty

Pod názvem Hallova věta se v literatuře vyskytují na první pohled odlišná tvrzení, která jsou však ve skutečnosti ekvivalentní. Jako motivace k první verzi Hallovy věty může posloužit následující úloha: *Obyvatelé jistého města se sdružují v mnoha spolcích, řada z nich je dokonce členy několika spolků zároveň. Je možné v každém spolku zvolit předsedu tak, aby každý občan předsedal maximálně jednomu spolku?*

Přeformulujeme tuto úlohu v jazyce množin: Nechť $A_1, \ldots, A_n$ jsou podmnožiny jisté množiny X. Řekneme, že prvky $x_1, \ldots, x_n$ tvoří systém různých reprezentantů, pokud jsou navzájem různé a platí $x_i \in A_i$ pro všechna $i \in \{1, \ldots, n\}$. Hallova věta udává nutnou a postačující podmínku pro existenci takového systému.[1]

Věta 1.1 (Hallova věta, množinová verze). *Pro podmnožiny $A_1, \ldots, A_n$ konečné množiny X existuje systém různých reprezentantů, právě když pro každé $m \in \{1, \ldots, n\}$ platí, že sjednocení libovolných m množin z $A_1, \ldots, A_n$ obsahuje aspoň m prvků.*

Podmínku z předchozí věty lze zkráceně formulovat tak, že pro každou množinu $I \subset \{1, \ldots, n\}$ má platit $\left|\bigcup_{i \in I} A_i\right| \geq |I|$ (symbolem $|X|$ značíme počet prvků konečné množiny X). Je zřejmé, že uvedená podmínka je nutná: Pokud by sjednocení některé m-tice množin mělo méně než m prvků, pak množinám nelze přiřadit m různých reprezentantů.

Druhá verze Hallovy věty bývá označována jako *marriage theorem*, neboť ji lze motivovat následující úlohou: *V databázi jisté seznamovací agentury je evidováno m dam a n pánů, kde $m \leq n$. Každá dáma označí některé pány, se kterými je ochotna se seznámit. Chceme-li respektovat přání všech dam, je možné přiřadit každé z nich partnera a utvořit tak m disjunktních párů?*

Tuto úlohu lze snadno zformulovat v jazyce teorie grafů. Připomeneme nejprve některé základní pojmy. Budeme uvažovat neorientované grafy $G = (V, E)$, kde V označuje množinu vrcholů a E množinu hran. Řekneme, že G je *bipartitní graf* s částmi[2] V_1 a V_2, pokud $V = V_1 \cup V_2$, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ a každá hrana grafu spojuje vrchol z V_1

[1] Nepředpokládá se, že množiny $A_1, \ldots, A_n$ jsou navzájem různé.
[2] Někdy se místo o částech hovoří o partitách.

Doc. RNDr. Antonín Slavík, Ph.D., Matematicko-fyzikální fakulta UK, Sokolovská 83, 186 75 Praha 8 – Karlín, e-mail: slavik@karlin.mff.cuni.cz

s vrcholem z V_2. *Párování* v libovolném grafu G je každá množina hran, z nichž žádné dvě nemají společný vrchol. Řekneme, že párování pokrývá množinu vrcholů $W \subset V$, pokud každý vrchol z W je incidentní s některou hranou párování.

Druhá verze Hallovy věty udává nutnou a postačující podmínku pro existenci párování v bipartitním grafu, které pokrývá jednu z jeho částí.[3]

Věta 1.2 (Hallova věta, grafová verze)**.** *Nechť $G = (V, E)$ je bipartitní graf s částmi V_1 a V_2. Pak existuje párování pokrývající množinu vrcholů V_1, právě když každá množina vrcholů $W \subset V_1$ má aspoň $|W|$ sousedů.*

Mají-li obě části bipartitního grafu stejný počet vrcholů, pak Hallova věta udává nutnou a postačující podmínku pro existenci *perfektního párování*, tj. párování, které pokrývá všechny vrcholy grafu.

Nutnou a postačující podmínku z předchozí věty lze zformulovat stručněji, pokud pro libovolný graf $G = (V, E)$ a množinu $W \subset V$ zavedeme označení

$$N(W) = \{v \in V : \exists w \in W \; \{v, w\} \in E\}$$

(tj. $N(W)$ je množina všech vrcholů, které mají souseda v množině W). Podmínka v předchozí větě pak říká, že $|N(W)| \geq |W|$ pro všechny volby $W \subset V_1$.

Množinová a grafová verze Hallovy věty jsou ekvivalentní v tom smyslu, že pomocí jednoho tvrzení lze snadno dokázat druhé. Hledání systému různých reprezentantů množin $A_1, \ldots, A_n$ lze totiž převést na párování těchto množin a jejich prvků. Naopak hledání párování v bipartitním grafu, které pokrývá všechny vrcholy z části V_1, je ekvivalentní s tím, že ke každému vrcholu z V_1 hledáme reprezentanta množiny jeho sousedů. Popišme obě konstrukce podrobněji:

- Nechť jsou dány podmnožiny $A_1, \ldots, A_n$ konečné množiny X, které splňují podmínku z věty 1.1. Sestrojíme bipartitní graf s částmi V_1 a V_2 následujícím způsobem: V části V_1 budou vrcholy očíslované čísly $1, \ldots, n$, zatímco prvky množiny X prohlásíme za vrcholy v části V_2. Dvojici vrcholů $i \in V_1$, $x \in V_2$ spojíme hranou právě tehdy, když $x \in A_i$. Získaný graf splňuje podmínku z věty 1.2 (pro $W \subset V_1$ platí $|N(W)| = |\bigcup_{i \in W} A_i| > |W|$) a lze v něm tudíž najít párování pokrývající vrcholy z V_1. Každé číslo $i \in V_1$ je tedy spárováno s jistým prvkem $x \in V_2$, který prohlásíme za reprezentanta množiny A_i; tím jsme získali systém různých reprezentantů.

- Nechť je dán bipartitní graf s částmi V_1 a V_2 splňující podmínku z věty 1.2. Položíme $X = V_2$. Je-li část V_1 tvořena vrcholy $v_1, \ldots, v_n$, definujeme $A_i = N(\{v_i\})$ pro každé $i \in \{1, \ldots, n\}$. Množiny $A_1, \ldots, A_n$ splňují podmínku z věty 1.1 (pro $I \subset \{1, \ldots, n\}$ platí $\left|\bigcup_{i \in I} A_i\right| = |N(\{v_i : i \in I\})| \geq |I|$) a mají tedy systém různých reprezentantů. Pokud každý vrchol $v \in V_1$ spárujeme s reprezentantem množiny $N(\{v\})$, získáme párování v grafu G, které pokrývá vrcholy z V_1.

Vzhledem k ekvivalenci vět 1.1 a 1.2 stačí dokázat jednu z nich. Následující důkaz věty 1.1 je převzat z [1].

[3] Nejsou-li části V_1 a V_2 bipartitního grafu stejně velké, pak má smysl hledat pouze párování, které pokrývá menší část.

Důkaz. Jedna z implikací ve větě 1.1 je triviální: Pokud by sjednocení některých m množin z $A_1, \ldots, A_n$ mělo méně než m prvků, pak není možné těmto množinám přiřadit různé reprezentanty.

Druhou implikaci dokážeme indukcí vzhledem k počtu množin n. Pro $n = 1$ tvrzení jistě platí. Ukážeme, že z platnosti tvrzení pro $1, \ldots, n-1$ množin vyplývá jeho platnost pro n množin. Předpokládejme tedy, že pro každou množinu $I \subset \{1, \ldots, n\}$ platí $\left|\bigcup_{i \in I} A_i\right| \geq |I|$. Rozlišíme dva případy:

- Pro každé $m \in \{1, \ldots, n-1\}$ platí, že sjednocení libovolné m-tice z množin $A_1, \ldots, A_n$ má aspoň $m + 1$ prvků. Z množiny A_n vybereme libovolného reprezentanta x_n a uvážíme množiny $A_1 \setminus \{x_n\}, \ldots, A_{n-1} \setminus \{x_n\}$. Sjednocení libovolné m-tice z nich má aspoň m prvků, indukční předpoklad tedy zaručuje existenci systému různých reprezentantů $x_1, \ldots, x_{n-1}$ a jsme hotovi.

- Existuje $m \in \{1, \ldots, n-1\}$ a m-tice z množin $A_1, \ldots, A_n$, jejichž sjednocení má právě m prvků. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že se jedná o množiny $A_1, \ldots, A_m$. Podle indukčního předpokladu mají systém různých reprezentantů $x_1, \ldots, x_m$. Vezmeme-li libovolnou ℓ-tici z množin $A_{m+1}, \ldots, A_n$, pak jejich sjednocení s množinami $A_1, \ldots, A_m$ obsahuje podle předpokladu aspoň $\ell + m$ prvků. Sjednocení samotné ℓ-tice tedy obsahuje aspoň ℓ prvků nepatřících do žádné z množin $A_1, \ldots, A_m$. Podle indukčního předpokladu tak množiny $A_{m+1} \setminus \bigcup_{i=1}^{m} A_i, \ldots, A_n \setminus \bigcup_{i=1}^{m} A_i$ mají systém různých reprezentantů $x_{m+1}, \ldots, x_n$, čímž je důkaz dokončen.

□

Následující verze Hallovy věty je zdánlivě obecnější než věta 1.1, neboť pro každou množinu A_i umožňuje předepsat požadovaný počet reprezentantů b_i. Z důkazu je však vidět, že tuto situaci lze snadno převést na výběr různých reprezentantů popsaný ve větě 1.1. Tvrzení bývá v literatuře označováno jako *harem theorem*, neboť výběr reprezentantů lze interpretovat jako situaci, kdy si i-tá dáma vybírá b_i pánů.[4]

Věta 1.3 (Hallova věta, harémová verze)**.** *Jsou-li dána čísla $b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{N}_0$ a podmnožiny $A_1, \ldots, A_n$ konečné množiny X, pak jsou následující podmínky ekvivalentní:*

1. *Z každé množiny A_i lze vybrat b_i různých reprezentantů tak, že každý prvek reprezentuje nejvýše jednu množinu.*
2. *Pro každou množinu $I \subset \{1, \ldots, n\}$ platí $\left|\bigcup_{i \in I} A_i\right| \geq \sum_{i \in I} b_i$.*

Důkaz. První podmínka zřejmě implikuje druhou. Obrácenou implikaci dokážeme převedením problému na klasickou Hallovu větu. Každou množinu A_i nahradíme jejími b_i kopiemi, čímž vznikne $b = b_1 + \cdots + b_n$ množin $C_1, \ldots, C_b$. Nyní stačí ukázat, že těmto množinám lze přiřadit různé reprezentanty. Potřebujeme tedy ověřit podmínku z věty 1.1: Pro každou množinu $J \subset \{1, \ldots, b\}$ má platit $\left|\bigcup_{j \in J} C_j\right| \geq |J|$.

[4] V původní formulaci pocházející od P. R. Halmose a H. E. Vaughana [14] jsou role žen a mužů obrácené (viz historické poznámky v oddíle 3). V. Bryant v knize [4] ovšem poznamenává: *Traditionally in a harem each man can have many wives but no woman can have more than one husband. We now deduce the harem version of Hall's theorem, but we do our small bit to put right the sexual imbalance.*

Nechť $\{A_i : i \in I\}$ jsou všechny množiny, jejichž kopie se vyskytují mezi množinami $\{C_j : j \in J\}$. Pak platí $\bigcup_{j\in J} C_j = \bigcup_{i\in I} A_i$, tedy

$$\Big|\bigcup_{j\in J} C_j\Big| = \Big|\bigcup_{i\in I} A_i\Big| \geq \sum_{i\in I} b_i \geq |J|. \qquad \square$$

Bipartitní grafy lze popsat maticemi, čímž dostaneme další verzi Hallovy věty.

Věta 1.4 (Hallova věta, maticová verze)**.** *Pro každou matici o rozměrech $m \times n$ jsou následující podmínky ekvivalentní:*

1. *Z každého řádku matice lze vybrat nenulový prvek tak, že žádné dva vybrané prvky neleží ve stejných sloupcích.*
2. *Z matice nelze vybrat nulovou podmatici*[5] *o k řádcích a ℓ sloupcích, kde $k + \ell > n$.*

Důkaz. Ukážeme, že tvrzení je jen jinou formulací grafové verze Hallovy věty. Matici A o rozměrech $m \times n$ ztotožníme s bipartitním grafem $G = (V, E)$ s částmi $V_1 = \{v_1, \ldots, v_m\}$ a $V_2 = \{w_1, \ldots, w_n\}$, kde v_i a w_j jsou spojeny hranou, právě když $a_{ij} \neq 0$. Podmínka 1 je pak ekvivalentní s existencí párování v grafu G, které pokrývá množinu V_1. Podle věty 1.2 to nastává právě tehdy, když pro každou množinu $W \subset V_1$ platí $|N(W)| \geq |W|$. Tato podmínka jinými slovy říká, že každá k-tice řádků matice A obsahuje nenulové prvky v aspoň k různých sloupcích, tj. v maximálně $n-k$ sloupcích jsou samé nuly. To je však jen jiné vyjádření podmínky 2. $\square$

Vidíme, že věty 1.1 až 1.4 jsou v podstatě totožná tvrzení. Přesto je užitečné mít tato ekvivalentní vyjádření Hallovy věty k dispozici, což se pokusíme ukázat v následující části. Z praktického pohledu je důležité, že výběr reprezentantů množin i výběr nenulových prvků z matice lze převést na hledání párování v bipartitním grafu, neboť pro řešení tohoto problému existují efektivní algoritmy.

2. Příklady a aplikace

V této části představíme několik elementárních aplikací Hallovy věty. Nejedná se o vyčerpávající přehled – zaměříme se na snadno srozumitelné problémy z různých oblastí matematiky (rekreační matematika, lineární algebra, diskrétní matematika, teorie grup) a dále na výsledky, které sehrály důležitou roli v historii Hallovy věty (viz oddíl 3).

Příklad 2.1 ([19], s. 419)**.** Standardní balíček hracích karet je tvořen 52 kartami rozdělenými do čtyř barev, s třinácti hodnotami 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q, K, A. Balíček promícháme a karty následně vyskládáme do 4 řádků a 13 sloupců (v libovolném pořadí). Úkolem hráče je vybrat z každého sloupce jednu kartu tak, aby na konci měl od každé hodnoty po jedné kartě (libovolné barvy). Situaci ilustruje obrázek 1. Hráč může úkol splnit např. tak, že z jednotlivých sloupců postupně volí karty s hodnotami 5, 4, A, J, Q, 2, 6, 10, 3, 7, 8, 9, K.

[5] Pojem *podmatice* zde chápeme v obecnějším smyslu, než je obvyklé. Jedná se o prvky, které se nacházejí v průniku libovolné množiny řádků a sloupců (nemusí se jednat o sousední řádky či sloupce).

♠ 7	♥ 2	♠ A	♦ 2	♦ 3	♣ 2	♠ 6	♠ 9	♥ 10	♣ 9	♣ Q	♥ 6	♠ 5
♦ 9	♠ 8	♥ A	♥ 8	♣ 4	♥ 7	♦ 5	♣ K	♠ 2	♥ 4	♣ 8	♥ 9	♥ K
♦ Q	♦ 4	♣ 3	♥ J	♠ Q	♦ 10	♦ 8	♦ 6	♠ 3	♣ 10	♦ 7	♠ J	♦ J
♣ 5	♦ A	♥ 3	♣ J	♣ 6	♥ Q	♣ A	♠ 10	♠ K	♣ 7	♠ 4	♥ 5	♦ K

Obr. 1. 52 karet rozmístěných do 4 řádků a 13 sloupců

Tvrdíme, že takový výběr je možný při jakékoliv permutaci karet. K důkazu použijeme větu 1.1. Položíme $X = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, \mathrm{J}, \mathrm{Q}, \mathrm{K}, \mathrm{A}\}$ a pro $i \in \{1, \ldots, 13\}$ označíme symbolem A_i množinu všech hodnot karet, které se vyskytují v i-tém sloupci. Nyní stačí dokázat, že množiny $A_1, \ldots, A_{13}$ mají systém různých reprezentantů. Libovolných m sloupců obsahuje $4m$ karet. Každá hodnota je zastoupena maximálně čtyřikrát, proto je ve výběru aspoň m různých hodnot. To znamená, že pro každých m množin z $A_1, \ldots, A_{13}$ má jejich sjednocení aspoň m prvků, a podmínka z věty 1.1 je tedy splněna.

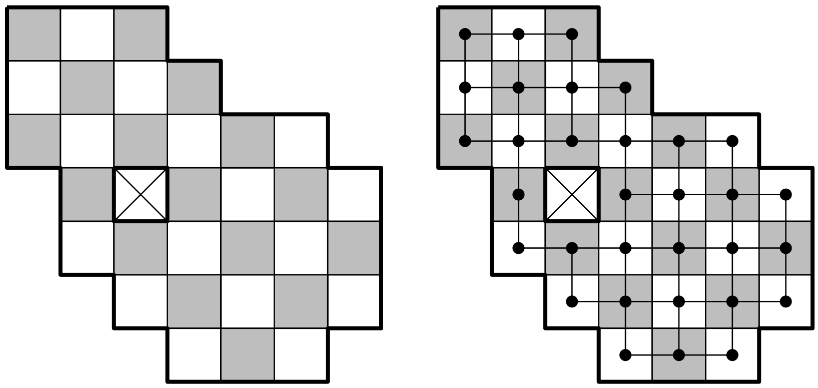
Čtenář si snadno rozmyslí následující poznámky:

- Poté, co vybereme od každé hodnoty jednu kartu, lze celý proces zopakovat se zbylými 39 kartami a následně i s 26 kartami.
- Pokud bychom místo výběru ze sloupců vybírali po jedné kartě z každého řádku, pak lze vždy dosáhnout toho, že zvolíme čtyři různé barvy.

Příklad 2.2 ([2], s. 36)**.** Na obrázku 2 je útvar složený ze 16 bílých a 16 šedých polí (přeškrtnuté políčko není součástí obrazce). *Domino* je obdélníková dlaždice o rozměrech 2×1, pomocí které lze pokrýt libovolná dvě pole se společnou hranou. Lze zadaný útvar beze zbytku pokrýt dominy tak, aby se žádná dvě nepřekrývala? Po chvíli experimentování zjistíme, že to pravděpodobně není možné. Jak tuto skutečnost dokázat, aniž bychom museli rozebírat velké množství případů?

Zkonstruujeme graf následujícím způsobem: Každému políčku obrazce bude odpovídat jeden vrchol. Dva vrcholy spojíme hranou, pokud lze příslušná políčka pokrýt jedním dominem. Nyní je zřejmé, že obrazec lze pokrýt dominy, právě když v sestrojeném grafu existuje perfektní párování (každá hrana párování odpovídá jednomu dominu). Každá hrana spojuje bílé a šedé políčko, graf je tedy bipartitní a jeho dvě části jsou vrcholy reprezentující bílá, resp. šedá políčka. K důkazu, že perfektní párování neexistuje, použijeme větu 1.2. Za množinu W zvolíme vrcholy reprezentující všechna šedá políčka v prvním řádku, všechna šedá políčka ve druhém řádku a dále šedá políčka ve třetím řádku nacházející se v prvním a třetím sloupci; celkem jsme vybrali $|W| = 6$ šedých políček. Z nich vedou hrany do 5 bílých políček, tj. $|N(W)| = 5$ a nutná podmínka pro existenci perfektního párování tedy není splněna.

Obrazec z předchozí úlohy není nijak speciální; v každém obrazci složeném ze čtvercových políček je pokrývání dominy ekvivalentní s hledáním perfektního párování



Obr. 2. Obrazec vlevo lze pokrýt dominy, právě když v grafu vpravo existuje perfektní párování

v příslušném grafu. Ten je vždy bipartitní a vztahuje se na něj věta 1.2. Pokud tedy perfektní párování neexistuje, vždy to můžeme dokázat nalezením množiny políček W a jejich sousedů $N(W)$, kde $|N(W)| < |W|$.

Další aplikace Hallovy věty souvisí s maticemi. Je zřejmé, že každá čtvercová matice obsahující aspoň jeden nulový řádek či sloupec je singulární. Toto pozorování zobecňuje následující věta (viz [30]).

Věta 2.3. *Jestliže matice A o rozměrech $n \times n$ obsahuje nulovou podmatici*[6] *o rozměrech $k \times \ell$, kde $k + \ell > n$, pak A je singulární.*

Důkaz. Tvrzení je přímým důsledek maticové verze Hallovy věty. Protože podmínka 2 ve větě 1.4 je porušena, vyplývá odsud, že není možné zvolit v každém řádku matice A nenulový prvek tak, aby tyto prvky ležely v různých sloupcích. To však znamená, že každý sčítanec $a_{1\pi(1)} \cdots a_{n\pi(n)}$ (kde π je permutace množiny $\{1, \ldots, n\}$) v definici determinantu

$$\det A = \sum_{\pi} \operatorname{sgn}(\pi) a_{1\pi(1)} \cdots a_{n\pi(n)}$$

je nulový, a tudíž A je singulární matice. □

Důkaz následující věty je převzat z [34], str. 59.

Věta 2.4. *Nechť A je nezáporná matice o rozměrech $n \times n$, ve které mají všechny řádky i sloupce stejné součty. Pak lze z každého řádku vybrat jeden nenulový prvek tak, že žádné dva vybrané prvky neleží ve stejném sloupci.*

Důkaz. Neobsahuje-li A žádné nuly, pak tvrzení platí. Jinak uvažujme libovolnou nulovou podmatici o k řádcích a ℓ sloupcích. Bez újmy na obecnosti lze předpokládat,

[6] Termín podmatice má stejný význam jako ve větě 1.4, podmatice tedy nemusí být tvořena sousedními řádky či sloupci.

že jde o prvních k řádků a prvních ℓ sloupců matice A (permutace řádků či sloupců nemá žádný vliv na platnost tvrzení), tj.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & B \\ C & D \end{pmatrix}.$$

Součty prvků v řádcích matice B i sloupcích matice C jsou rovny jistému číslu s. Součet všech prvků matice A je $ns \geq ks + \ell s$. Platí tedy $n \geq k + \ell$ a k dokončení důkazu stačí použít větu 1.4. □

Příklad 2.5 ([15], str. 459)**.** Na šachovnici o rozměrech $n \times n$ jsou rozmístěny věže tak, že v každém řádku a v každém sloupci se nachází právě k figur (jejich barvy ani barvy políček nejsou podstatné). Tvrdíme, že vždy můžeme vybrat n věží, které se navzájem neohrožují (tj. každé dvě jsou v různých řádcích i sloupcích). Toto tvrzení jednoduchým důsledkem věty 2.4 – stačí šachovnici nahradit maticí tvořenou nulami a jedničkami, přičemž jedničky odpovídají pozicím věží. Opakovaným použitím věty 2.4 lze dokonce dokázat silnější tvrzení: všech kn věží můžeme rozdělit do k skupin tvořených n neohrožujícími se věžemi.

Víme, že pro bipartitní grafy udává věta 1.2 nutnou a postačující podmínku pro existenci párování, které pokrývá jednu z částí grafu. Místo ověřování této podmínky může být v některých případech snazší použít následující větu. Připomeňme, že je-li dán graf $G = (V, E)$ a vrchol $v \in V$, pak jeho *stupeň* (tj. počet hran incidentních s tímto vrcholem) se značí $\deg v$. Graf se nazývá *regulární*, pokud všechny jeho vrcholy mají stejný stupeň.

Věta 2.6. *Nechť $G = (V, E)$ je bipartitní graf s částmi V_1 a V_2, který má aspoň jednu hranu. Pokud platí*

$$\max_{v \in V_2} \deg v \leq \min_{w \in V_1} \deg w,$$

pak v grafu G existuje párování pokrývající množinu vrcholů V_1.

Důkaz. Ukážeme, že je splněna podmínka z věty 1.2 . Nechť $W \subset V_1$. Počet hran spojujících W a $N(W)$ je nejméně $(\min_{w \in V_1} \deg w)|W|$ a nejvýše $(\max_{v \in V_2} \deg v)|N(W)|$. Platí tedy

$$(\min_{w \in V_1} \deg w)|W| \leq (\max_{v \in V_2} \deg v)|N(W)| \leq (\min_{w \in V_1} \deg w)|N(W)|,$$

odkud plyne $|N(W)| \geq |W|$, neboť podle předpokladů věty má každý vrchol z V_1 stupeň aspoň 1. □

Důsledek 2.7. *V každém regulárním bipartitním grafu existuje perfektní párování. Mají-li všechny vrcholy grafu stupeň k, pak množinu všech jeho hran lze rozložit na k disjunktních perfektních párování.*

Následující příklad je převzat z [25].

Příklad 2.8. Kouzelník se svým asistentem provozují následující karetní trik: Asistent nechá osobu z obecenstva vybrat libovolných pět karet ze standardního balíčku 52 hracích karet. Asistent si karty prohlédne, čtyři z nich odkryje a vyskládá na stůl vedle sebe. Kouzelník poté uhodne barvu i hodnotu neodkryté páté karty. Jak je to možné? Stačí, když se kouzelník s asistentem dohodnou na prostém zobrazení $f : V_1 \to V_2$, kde V_1 je množina všech neuspořádaných pětic karet, V_2 je množina všech uspořádaných čtveřic a obrazem libovolné pětice $\{a, b, c, d, e\}$ je uspořádaná čtveřice (x, y, z, w), kde x, y, z, w jsou navzájem různé prvky množiny $\{a, b, c, d, e\}$. Poté, co osoba z obecenstva vybere pětici $\{a, b, c, d, e\}$, asistent vyloží na stůl uspořádanou čtveřici $f(\{a, b, c, d, e\})$. Jelikož je f prosté, kouzelník může ze znalosti $f(\{a, b, c, d, e\})$ jednoznačně určit neuspořádanou pětici $\{a, b, c, d, e\}$. Jak víme, že takové zobrazení f existuje? Zkonstruujeme bipartitní graf s částmi V_1 a V_2, přičemž pětici $\{a, b, c, d, e\}$ spojíme hranou se čtveřicí (x, y, z, w), právě když x, y, z, w jsou navzájem různé prvky množiny $\{a, b, c, d, e\}$. Všechny vrcholy v části V_1 mají stupeň $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$, zatímco vrcholy v části V_2 mají stupeň $52 - 4 = 48$. Podle věty 2.6 tudíž existuje párování, které pokrývá všechny vrcholy V_1. Pomocí něj snadno získáme prosté zobrazení $f : V_1 \to V_2$. (Poměrně jednoduchý příklad takového zobrazení lze najít v [25].)

Představme si jistý sportovní turnaj s n účastníky, ve kterém se každý utká s každým. Předpokládejme, že žádný zápas neskončí remízou – jeden ze soupeřů vždy zvítězí. Celkem se tedy odehraje $\binom{n}{2}$ zápasů. Pro každého hráče zaznamenáme počet jeho vítězství a tato čísla seřadíme do posloupnosti. Zajímá nás, jak taková posloupnost $b_1, \ldots, b_n$ může vypadat. Jejími členy jsou celá čísla z množiny $\{0, \ldots, n-1\}$, jejichž součet je $\binom{n}{2}$. Ne každá taková posloupnost však odpovídá nějakému turnaji. Jako příklad poslouží např. posloupnost 5, 4, 4, 1, 1, 0, jejíž členy dávají součet $15 = \binom{6}{2}$. Každá trojice hráčů musela odehrát $\binom{3}{2} = 3$ vzájemné zápasy a v každém někdo z nich zvítězil, proto součet žádné trojice čísel v posloupnosti nemůže být menší než 3. Tato podmínka je však porušena u posledních tří členů naší posloupnosti.

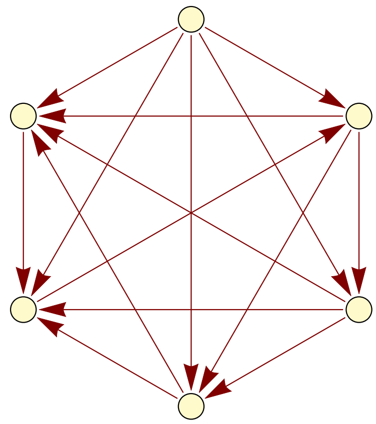
Přeformulujeme problém v řeči grafů. Turnaj můžeme znázornit orientovaným grafem s n vrcholy odpovídajícími hráčům. Skutečnost, že hráč i zvítězil nad hráčem j, vyznačíme orientovanou hranou z i do j. Pro každé $i \in \{1, \ldots, n\}$ pak hodnota b_i odpovídá počtu hran vycházejících z vrcholu i. Tyto úvahy vedou k následujícím definicím: *Turnaj* je orientovaný graf $G = (V, E)$ takový, že pro každou dvojici vrcholů $i, j \in V$ platí buď $(i, j) \in E$, nebo $(j, i) \in E$. *Výstupní stupeň vrcholu* v libovolném orientovaném grafu je počet hran, které z vrcholu vycházejí. *Skóre turnaje* je posloupnost výstupních stupňů všech vrcholů daného turnaje (v libovolném pořadí). Všechny pojmy ilustruje obrázek 3.

Autorem následující věty, která charakterizuje všechna přípustná skóre, je Hyman Garshin Landau [18], který se snažil popsat vztahy ve zvířecích společnostech (např. v hejnech kuřat). Jednoduchý důkaz založený na použití harémové verze Hallovy věty je převzat z [4].

Věta 2.9. *Posloupnost čísel $b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{N}_0$ představuje skóre nějakého turnaje, právě když jsou splněny následující podmínky:*

1. $b_1 + \cdots + b_n = \binom{n}{2}$.
2. *Pro každou množinu $I \subset \{1, \ldots, n\}$ platí $\sum_{i \in I} b_i \geq \binom{|I|}{2}$.*

Důkaz. Obě podmínky jsou zřejmě nutné k existenci turnaje; druhá podmínka odpovídá tomu, že hráči z množiny I sehrají $\binom{|I|}{2}$ vzájemných zápasů a v každém některý z nich zvítězí.



Obr. 3. Turnaj tvořený šesti vrcholy, jehož skóre je 2, 3, 3, 5, 1, 1 (výstupní stupně jsou uvedeny v pořadí od spodního vrcholu proti směru hodinových ručiček)

Nechť je dána posloupnost $b_1, \dots, b_n$ splňující předpoklady 1 a 2. Chceme dokázat, že existuje turnaj s n vrcholy, kde výstupní stupeň i-tého vrcholu je b_i. Začneme tím, že vezmeme úplný neorientovaný graf na n vrcholech, tj. graf s hranami $\{i, j\}$, kde $1 \leq i < j \leq n$. S i-tým vrcholem jsou tedy incidentní hrany z množiny

$$A_i = \{\{i, j\} : j \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i\}\}.$$

Pro každou hranu nyní musíme zvolit orientaci. To lze zařídit tak, že pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ vybereme z množiny A_i celkem b_i různých hran, které budou mířit ven z vrcholu i, přičemž všech $b_1 + \dots + b_n$ vybraných hran musí být navzájem různých. Nyní stačí ověřit, že jsou splněny podmínky věty 1.3. Potřebujeme ukázat, že pro každou množinu $I \subset \{1, \dots, n\}$ platí $\left|\bigcup_{i \in I} A_i\right| \geq \sum_{i \in I} b_i$. Aplikujeme-li předpoklad 2 na množinu $\{1, \dots, n\} \setminus I$, obdržíme $\sum_{i \notin I} b_i \geq \binom{n-|I|}{2}$. Dále si uvědomíme, že v množině $\bigcup_{i \in I} A_i$ jsou všechny neorientované hrany s výjimkou těch, které spojují vrcholy z množiny $\{1, \dots, n\} \setminus I$. Platí tedy

$$\left|\bigcup_{i \in I} A_i\right| = \binom{n}{2} - \binom{n - |I|}{2} \geq \binom{n}{2} - \sum_{i \notin I} b_i = \sum_{i \in I} b_i$$

a důkaz je dokončen. □

Ve formulaci předchozí věty se někdy navíc předpokládá, že $b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n$. Podmínka 2 se pak zjednoduší: Stačí ověřit, že pro každé $r \in \{1, \dots, n-1\}$ platí $\sum_{i=1}^{r} b_i \geq \binom{r}{2}$.

Následující věta a její důsledek o existenci společných reprezentantů pro dva různé systémy množin sehrály důležitou roli v historii Hallovy věty (viz podrobnější informace v oddíle 3).

Věta 2.10. *Nechť X je konečná množina, která je dvěma způsoby rozdělena na disjunktní podmnožiny: $X = T_1 \cup \dots \cup T_n = S_1 \cup \dots \cup S_m$. Předpokládejme, že sjednocení každých k množin z $T_1, \dots, T_n$ obsahuje prvky aspoň k množin z $S_1, \dots, S_m$. Pak existují navzájem různé prvky $x_i \in T_i$, $i \in \{1, \dots, n\}$, z nichž žádné dva neleží ve stejné množině S_j.*

Důkaz. Pro $i \in \{1, \dots, n\}$ položíme $A_i = \{S_j : S_j \cap T_i \neq \emptyset\}$. Stačí dokázat, že tyto množiny $A_1, \dots, A_n$ mají systém různých reprezentantů – v tom případě se totiž jedná o n-tici disjunktních množin $S_{j(1)}, \dots, S_{j(n)}$, kde $S_{j(i)} \cap T_i \neq \emptyset$, a můžeme volit $x_i \in S_{j(i)}$ pro všechna $i \in \{1, \dots, n\}$. Systém různých reprezentantů pro $A_1, \dots, A_n$ vskutku existuje, neboť je splněn předpoklad Hallovy věty: Pro $I \subset \{1, \dots, n\}$ platí

$$\Big|\bigcup_{i\in I} A_i\Big| = \Big|\bigcup_{i\in I} \{S_j : S_j \cap T_i \neq \emptyset\}\Big| = \Big|\{S_j : S_j \cap \bigcup_{i\in I} T_i \neq \emptyset\}\Big| \geq |I|. \qquad \square$$

Důsledek 2.11. *Nechť X je konečná množina, která je dvěma způsoby rozdělena na n disjunktních podmnožin po ℓ prvcích: $X = T_1 \cup \dots \cup T_n = S_1 \cup \dots \cup S_n$. Pak existují navzájem různé prvky $x_1, \dots, x_n \in X$, z nichž žádné dva neleží ve stejné množině T_i ani ve stejné množině S_j.*

Důkaz. Stačí ověřit předpoklad věty 2.10. Libovolná k-tice z množin $T_1, \dots, T_n$ má celkem $k\ell$ různých prvků, které nemohou být obsaženy v méně než k množinách z $S_1, \dots, S_n$.[7] $\square$

Předchozí důsledek je užitečný v teorii grup. Pro libovolnou grupu G, její podgrupu H a prvek $g \in G$ definujeme *levou rozkladovou třídu* $gH = \{gh : h \in H\}$ a *pravou rozkladovou třídu* $Hg = \{hg : h \in H\}$. Každé dvě levé/pravé rozkladové třídy jsou buď disjunktní, nebo splývají. Je-li H konečná, pak velikost každé rozkladové třídy je $|H|$. Systém množin $\{gH : g \in G\}$, resp. $\{Hg : g \in G\}$, se nazývá *levý*, resp. *pravý rozklad* grupy G podle podgrupy H. Vybereme-li z každé z disjunktních levých/pravých rozkladových tříd po jednom prvku, dostaneme systém různých reprezentantů, který se nazývá *transverzála.* Jak tyto pojmy souvisejí s důsledkem 2.11? Máme-li konečnou grupu G a její podgrupu H, pak za množiny $A_1, \dots, A_n$, resp. $B_1, \dots, B_n$ můžeme volit levé, resp. pravé rozkladové třídy, čímž dostáváme následující důsledek.

Důsledek 2.12. *Nechť G je konečná grupa a H její podgrupa. Pak levý a pravý rozklad G podle H mají společnou transverzálu.*

Další aplikace Hallovy věty souvisejí s latinskými čtverci a obdélníky. *Latinský obdélník o rozměrech $r \times n$*, kde $r \leq n$, je obdélníková tabulka rozdělená na $r \times n$ políček. V každém z nich je zapsáno číslo z množiny $\{1, \dots, n\}$ tak, že v žádném řádku ani sloupci se čísla neopakují. Pokud $r = n$, jedná se o *latinský čtverec.* Jsou-li vyplněna pouze některá políčka tabulky, přičemž je dodržena podmínka, že se v řádcích ani sloupcích čísla neopakují, hovoříme o *neúplném latinském čtverci.*

Následující klasická věta, jejíž důkaz je převzat z [10], ukazuje, že každý latinský obdélník lze rozšířit na latinský čtverec.

[7] Tvrzení důsledku 2.11 lze zesílit: Jeho opakovaným použitím dostáváme existenci ℓ různých n-tic prvků X s předepsanou vlastností. V oddíle 3 je vysvětleno, že důsledek 2.7 je ekvivalentní s důsledkem 2.11.

Věta 2.13. *Každý latinský obdélník o rozměrech $r \times n$, kde $r \leq n$, lze doplnit na latinský čtverec o rozměrech $n \times n$.*

Důkaz. Stačí dokázat, že každý latinský obdélník o rozměrech $r \times n$ lze rozšířit na latinský obdélník o rozměrech $(r+1) \times n$. Pro každé $i \in \{1, \ldots, n\}$ označíme symbolem A_i množinu všech čísel, která se nevyskytují v i-tém sloupci zadaného obdélníku. Nyní stačí dokázat, že množiny $A_1, \ldots, A_n$ mají systém různých reprezentantů. Velikost každé množiny A_i je $n - r$. Vezmeme-li libovolných m množin z $A_1, \ldots, A_n$, pak součet jejich velikostí je $m(n-r)$. Libovolné číslo od 1 a n se vyskytuje v $n - r$ množinách z $A_1, \ldots, A_n$ (neboť v každém řádku je právě jednou), a tedy v nejvýše $n - r$ množinách ze zvolené m-tice. To znamená, že sjednocení těchto m množin obsahuje aspoň m různých prvků, a je tedy splněna podmínka z věty 1.1. $\square$

Lze obecněji každý neúplný latinský čtverec rozšířit na latinský čtverec? Odpověď je záporná, stačí uvážit např. tabulku o rozměrech $n \times n$, kde v prvním řádku jsou čísla 1, …, $n-1$ a poslední sloupec je volný, ve druhém řádku je v posledním sloupci číslo n a všechny ostatní řádky jsou prázdné. Tento příklad je v jistém smyslu nejmenší možný: Bohdan Smetaniuk roku 1981 dokázal [28], že každý neúplný latinský čtverec o rozměrech $n \times n$, ve kterém je vyplněno nejvýše $n-1$ políček, lze rozšířit na latinský čtverec. Toto tvrzení zformuloval roku 1960 Trevor Evans a od té doby je známo jako Evansova domněnka. Zde pomocí Hallovy věty odvodíme slabší výsledek, který je ovšem důležitým prvním krokem k důkazu Evansovy domněnky.

Věta 2.14 ([1], s. 254)**.** *Každý neúplný latinský čtverec o rozměrech $n \times n$, ve kterém je vyplněno nejvýše $n-1$ políček, a to v prvních nejvýše $n/2$ řádcích, lze doplnit na latinský čtverec o rozměrech $n \times n$.*

Důkaz. Předpokládejme, že poslední vyplněné políčko je v řádku $r \leq n/2$. Nechť f_i je počet vyplněných políček v i-tém řádku. Pak $f_1 + \cdots + f_r \leq n - 1$ a bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $f_1 \geq f_2 \geq \cdots \geq f_r$ (jinak permutujeme řádky, doplníme na latinský čtverec a permutujeme zpět). Uvědomíme si ještě, že pro každé $\ell \in \{1, \ldots, r\}$ platí nerovnost

$$n - f_\ell - \ell + 1 > \ell - 1 + f_{\ell+1} + \cdots + f_r, \tag{1}$$

kterou budeme potřebovat později. Pro $\ell = 1$ je tvrzení zřejmé. Pro $\ell > 1$ máme $n > \sum_{i=1}^{r} f_i \geq (\ell-1) f_{\ell-1} + f_\ell + \cdots + f_r$. Je-li $f_{\ell-1} \geq 2$, dostáváme ihned nerovnost (1). Je-li naopak $f_{\ell-1} = 1$, potom též $f_\ell = \cdots = f_r = 1$ a nerovnost (1) se redukuje na $n > \ell + r - 1$, což platí, neboť $\ell \leq r \leq n/2$.

Nyní přikročíme k hlavní části důkazu. Budeme postupně vyplňovat prázdná políčka v řádcích $1, \ldots, r$ tak, abychom v každém okamžiku měli neúplný latinský čtverec; poté už stačí použít větu 2.13. Předpokládejme, že všechna původně volná políčka v řádcích $1, \ldots, \ell - 1$ již byla vyplněna; ukážeme, že pak lze vyplnit i políčka v ℓ-tém řádku. V něm je celkem f_ℓ vyplněných políček; bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že jsou v posledních f_ℓ sloupcích (jinak permutujeme sloupce).

Nechť X je množina všech čísel z $\{1, \ldots, n\}$, která se nevyskytují v ℓ-tém řádku. Pro každé $i \in \{1, \ldots, n - f_\ell\}$ označíme symbolem A_i množinu všech čísel z X, která se nevyskytují v i-tém sloupci (nad ani pod ℓ-tým řádkem). Nyní stačí dokázat, že množiny $A_1, \ldots, A_{n-f_\ell}$ mají systém různých reprezentantů. Ověříme podmínku z věty 1.1:

Volme neprázdnou množinu $I \subset \{1, \dots, n - f_\ell\}$ a ukažme, že $\left|\bigcup_{i\in I} A_i\right| \geq |I|$. Prvky I interpretujeme jako čísla sloupců a písmenem c označíme počet všech políček v těchto sloupcích, která jsou vyplněna čísly odlišnými od čísel v řádku ℓ. Každé číslo z množiny $X \setminus \bigcup_{i\in I} A_i = \bigcap_{i\in I}(X \setminus A_i)$ je v každém z vybraných $|I|$ sloupců a nenachází se v řádku ℓ (protože leží v X), a tedy

$$c \geq |I| \left(|X| - \left|\bigcup_{i\in I} A_i\right|\right),$$

odkud plyne odhad

$$\left|\bigcup_{i\in I} A_i\right| \geq |X| - \frac{c}{|I|} = n - f_\ell - \frac{c}{|I|}.$$

Protože $c \leq (\ell - 1)|I| + f_{\ell+1} + \dots + f_r$ (stačí uvážit řádky nad a pod ℓ-tým řádkem), dostáváme

$$\left|\bigcup_{i\in I} A_i\right| \geq n - f_\ell - \ell + 1 + \frac{1}{|I|}(f_{\ell+1} + \dots + f_r).$$

Nyní stačí dokázat, že pravá strana této nerovnosti je ostře větší než $|I| - 1$, což nastává, právě když

$$|I|(n - f_\ell - \ell + 1 - |I| + 1) > f_{\ell+1} + \dots + f_r. \tag{2}$$

Z (1) plyne, že nerovnost (2) platí pro $|I| = 1$ i pro $|I| = n - f_\ell - \ell + 1$. Platí tedy pro $|I| \in \{1, \dots, n - f_\ell - \ell + 1\}$, neboť na levé straně je kvadratický polynom v proměnné $|I|$ se záporným koeficientem u nejvyšší mocniny.

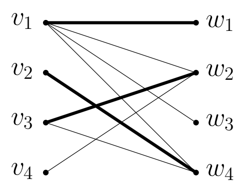
Zbývá vyšetřit případ $|I| > n - f_\ell - \ell + 1$. Každé číslo $x \in X$ se nachází v nejvýše $\ell - 1 + f_{\ell+1} + \dots + f_r$ řádcích, tedy i sloupcích. Z nerovnosti (1) plyne, že tento počet je nižší než $|I|$, a tedy x se nevyskytuje v některém ze sloupců určených množinou I. To znamená, že $x \in \bigcup_{i\in I} A_i$. Celkem jsme ukázali, že $X \subset \bigcup_{i\in I} A_i$, to ale nastává jen v případě, kdy $\bigcup_{i\in I} A_i = X$. Tehdy však platí $\left|\bigcup_{i\in I} A_i\right| = |X| = n - f_\ell \geq |I|$, čímž je věta dokázána. $\square$

Představme si bipartitní graf $G = (V, E)$, ve kterém neexistuje perfektní párování. V takovém případě můžeme chtít najít aspoň největší možné párování, tj. párování obsahující co nejvíce hran. Vrátíme-li se k úloze o seznamování pánů a dam, mohli bychom se ptát: *Jaké je maximální množství dam, kterým lze na základě jejich preferencí přiřadit partnery?*

Následující výklad je inspirován knihami [12] a [30]. Bipartitnímu grafu lze přiřadit matici A o rozměrech $m \times n$, kde řádky odpovídají vrcholům $v_1, \dots, v_m$ z části V_1, sloupce vrcholům $w_1, \dots, w_n$ z části V_2 a na pozici (i, j) se nachází jednička nebo nula podle toho, zda $\{v_i, w_j\} \in E$. Každé párování pak odpovídá výběru jedniček z navzájem různých řádků i sloupců; situaci ilustruje obrázek 4.

Abychom si usnadnili vyjadřování, zavedeme termín *linie*, kterým budeme rozumět libovolný řádek nebo sloupec matice. Nyní přichází klíčové pozorování:

Věta 2.15. *Nechť je dána matice A tvořená nulami a jedničkami. Pak maximální počet jedniček, z nichž každé dvě leží v různých řádcích i sloupcích, je roven minimálnímu počtu linií, jejichž sjednocení obsahuje všechny jedničky.*



$$A = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Obr. 4. Maximální párování v bipartitním grafu (vlevo); matice grafu s vyznačenými jedničkami, které odpovídají zvolenému párování (vpravo)

Pro ilustraci vezmeme např. matici z obrázku 4, která obsahuje tři jedničky v různých řádcích i sloupcích. To je v souladu s tím, že všechny jedničky v matici jsou obsaženy ve třech liniích:

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Důkaz věty 2.15. Máme-li k jedniček v různých řádcích i sloupcích, pak je nelze pokrýt méně než k liniemi; totéž pak platí pro všechny jedničky v matici A. Zbývá tedy dokázat: Je-li k minimální počet linií, kterými lze pokrýt všechny jedničky, pak lze vybrat k jedniček v různých řádcích i sloupcích. Předpokládejme, že mezi zmíněnými k liniemi je p řádků a q sloupců. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že jde o prvních p řádků a q sloupců (permutace řádků či sloupců nemá vliv na platnost dokazovaného tvrzení). Situace tedy vypadá následovně:

$$A = \begin{pmatrix} B & C \\ D & 0 \end{pmatrix}.$$

Tvrdíme, že z každého řádku matice C o rozměrech $p \times (n-q)$ lze vybrat jedničku tak, aby těchto p jedniček leželo v různých sloupcích. Pokud by tomu tak nebylo, pak podle věty 1.4 má C nulovou podmatici tvořenou k řádky a ℓ sloupci, kde $k + \ell > n - q$. To znamená, že všechny jedničky v C lze pokrýt pomocí $p - k$ řádků a $n - q - \ell$ sloupců, což je celkem $p - k + n - q - \ell < p$ linií. Protože matice B a D lze současně pokrýt q sloupci, byla by celá matice A pokryta méně než $p + q = k$ liniemi, což je spor.

Podobně se dokáže, že z každého sloupce matice D o rozměrech $(m - p) \times q$ lze vybrat jedničku tak, aby těchto q jedniček leželo v různých řádcích.

Tím je věta dokázána, neboť jsme našli $p + q = k$ jedniček v různých řádcích i sloupcích. □

Vraťme se k problému maximálního párování. V tomto případě každá linie v matici A odpovídá nějakému vrcholu grafu G. Linie, které pokrývají všechny jedničky, lze tedy chápat jako množinu vrcholů, v níž má každá hrana grafu aspoň jeden vrchol; taková množina se nazývá *vrcholové pokrytí* grafu. Dokázali jsme tedy následující větu.

Věta 2.16. *Maximální velikost párování v bipartitním grafu je rovna minimální velikosti vrcholového pokrytí.*

Naší původní motivací bylo zjištění maximální velikosti párování, větu 2.16 však lze s výhodou využít k nalezení minimální velikosti vrcholového pokrytí. To je obecně těžký problém, v bipartitních grafech je však díky předchozí větě snadno řešitelný, neboť pro hledání maximálního párování existují efektivní algoritmy.

3. Historické poznámky a souvislosti

Hallova věta v dnes známé podobě byla poprvé zformulována Philipem Hallem v článku z roku 1935 (viz dále). Uvidíme však, že některá tvrzení související či dokonce ekvivalentní s Hallovou větu byla známa již dříve. V poznámkách pod čarou uvádíme biografické informace o vybraných matematicích, které jsou vesměs převzaty z [24].

Důležitým mezníkem v historii Hallovy věty je článek Dénese Königa[8] [15] z roku 1916.[9] König zde definuje bipartitní graf (*paarer Graph*) jako graf, který neobsahuje žádnou kružnici liché délky. Ukazuje, že to nastává právě tehdy, když lze vrcholy rozdělit do dvou částí tak, že hrany spojují pouze vrcholy z různých částí. Poté dokazuje následující větu:

Nechť je dán bipartitní graf, jehož všechny vrcholy mají stupeň menší nebo roven d. Pak lze hrany grafu obarvit d barvami tak, že hrany stejné barvy nikdy nemají společný vrchol.[10]

Odtud ihned plyne následující důsledek: *Hrany každého d-regulárního grafu lze rozložit na d disjunktních perfektních párování.*

Speciálně platí, že v každém regulárním bipartitním grafu existuje perfektní párování. Königův článek pokračuje oddílem nazvaným *Anwendung auf Determinanten*, kde je dokázána následující věta (jde o speciální případ věty 2.4):

Nechť je dána nenulová matice A o rozměrech $n \times n$ tvořená nezápornými celými čísly, přičemž součty ve všech řádcích i sloupcích jsou stejné. Pak lze z matice vybrat n nenulových čísel, z nichž žádná dvě neleží ve stejném řádku ani sloupci, tj. při výpočtu determinantu A je aspoň jeden ze sčítanců $a_{1\pi(1)} \cdots a_{n\pi(n)}$ (kde π je permutace množiny $\{1, \dots, n\}$) nenulový.

Důkaz je jednoduchý: Zkonstruujeme bipartitní graf, kde vrcholy v jedné části V_1 odpovídají řádkům a vrcholy v druhé části V_2 odpovídají sloupcům matice. Vrcholy $i \in V_1$ a $j \in V_2$ spojíme a_{ij} různými hranami.[11] Výsledný graf je bipartitní a d-regulární, kde d je hodnota řádkových a sloupcových součtů v matici A. Graf má tedy perfektní párování a hrany tohoto párování odpovídají pozicím nenulových prvků matice, které leží v různých řádcích i sloupcích.[12]

[8] Maďarský matematik Dénes König (1884–1944) je znám především jako průkopník teorie grafů, zabýval se však i teorií množin a rekreační matematikou. Jeho kniha *Theorie der endlichen und unendlichen Graphen* z roku 1936 (v angličtině vyšla roku 1990 pod názvem *Theory of Finite and Infinite Graphs*) je historicky první a dlouhou dobu též jedinou monografií o teorii grafů, která je dodnes často citována. König ukončil svůj život sebevraždou, neboť se jako Žid obával perzekuce ze strany nacistů.

[9] Podle recenze v databázi Zentralblatt MATH je tento článek téměř identický s maďarsky psaným článkem [16], který vyšel ve stejném roce.

[10] Tato věta bývá v angličtině nazývána *König's line coloring theorem*. V dnešní terminologii tvrzení říká, že hranová barevnost bipartitního grafu je rovna maximálnímu stupni vrcholu. Důkaz věty není složitý, viz např. [4, s. 84].

[11] V celém článku pracuje König s multigrafy, tj. zobecněním grafů, kde dva vrcholy mohou být spojeny více než jednou hranou.

[12] Königova věta má i další zajímavý důsledek (viz [19]). Od n nenulových prvků matice, které

König dále píše, že pokud jsou prvky matice A pouze nuly a jedničky, přičemž v každém řádku i sloupci je d jedniček, pak příslušný graf je d-regulární. Jeho hrany lze tedy rozložit na d disjunktních perfektních párování, odkud vyplývá, že při výpočtu determinantu A se vyskytne aspoň d nenulových sčítanců. Jestliže jedničky v matici A interpretujeme jako pozice věží na šachovnici, dostáváme tak vlastně příklad 2.5, který König rovněž zmiňuje. V jeho verzi úlohy navíc může na jednom políčku stát více věží, což je dáno tím, že pracuje s multigrafy. Ve zbytku článku se König zabývá platností předchozích výsledků pro nekonečné grafy, což souvisí s jistým zobecněním Cantorovy–Bernsteinovy věty z teorie množin.

Maticová verze Hallovy věty je ekvivalentní s následujícím tvrzením: *Nechť A je čtvercová matice o rozměrech $n \times n$. Pak všechny sčítance v definici determinantu A jsou nulové, právě když A obsahuje nulovou podmatici o rozměrech $k \times \ell$, kde $k + \ell = n + 1$.* Tuto větu, která se nazývá Frobeniova-Königova[13], dokázal Georg Frobenius roku 1917 [9]; výše uvedený Königův výsledek o determinantech je jejím snadným důsledkem (viz důkaz věty 2.4). K němu se Frobenius vyjádřil kriticky; v práci [9] píše, že použití teorie grafů ke studiu determinantů je zcela nevhodné a Königův výsledek má jen malý význam. Spor mezi Frobeniem a Königem již dále nepokračoval, neboť Frobenius roku 1917 zemřel. Dnes není pochyb o tom, že lineární algebra a teorie grafů jsou příbuzné disciplíny, které se vzájemně inspirují. O vztahu mezi Frobeniovými a Königovými výsledky se lze více dočíst v [27].

Zastavme se dále u důsledku 2.12, který se týká existence společné transverzály pro levé i pravé rozkladové třídy grupy podle její podgrupy. Tento výsledek publikoval G. A. Miller v článku [23] z roku 1910, jeho důkaz byl však zcela odlišný od našeho. Roku 1927 si Bartel Leendert van der Waerden[14] povšiml [31], že podstata tohoto tvrzení nespočívá v teorii grup, ale plyne z důsledku 2.11, který hovoří o systému reprezentantů pro dva různé rozklady $X = A_1 \cup \dots \cup A_n = B_1 \cup \dots \cup B_n$ tvořené stejným počtem stejně velkých disjunktních podmnožin. Van der Waerdenův důkaz věty zabírá necelé dvě strany, v závěru článku je však zajímavá poznámka, kterou autor přidal během korektur. Píše, že si povšiml, že důsledek 2.11 snadno plyne z tvrzení D. Königa o existenci perfektního párování v regulárním bipartitním grafu. Stačí vzít bipartitní graf s částmi $V_1 = \{A_1, \dots, A_n\}$ a $V_2 = \{B_1, \dots, B_n\}$. Vrcholy A_i a B_j jsou spojeny tolika hranami, kolik prvků má průnik $A_i \cap B_j$. Ve skutečnosti se tedy jedná o regulární multigraf (stupně vrcholů odpovídají velikostem množin $|A_i|$ a $|B_j|$), který má podle Königovy věty perfektní párování a hrany tohoto párování odpovídají hledanému systému reprezentantů. Van der Waerden poznamenává, že lze postupo-

leží v různých řádcích i sloupcích, můžeme odečíst jedničky a znovu aplikovat stejnou větu. Odtud je vidět, že každá nenulová matice tvořená nezápornými celými čísly, kde součty ve všech řádcích i sloupcích jsou stejné, je součtem permutačních matic. Téměř stejným způsobem lze pomocí věty 2.4 dokázat Birkhoffovu větu, která říká, že každá dvojitě stochastická matice je konvexní kombinací permutačních matic (viz např. [30], str. 626).

[13] Ekvivalentní formulace této věty zní: *Permanent nezáporné čtvercové matice o rozměrech $n \times n$ je nulový, právě když A obsahuje nulovou podmatici o rozměrech $k \times \ell$, kde $k + \ell = n + 1$.*

[14] Nizozemský matematik Bartel Leendert van der Waerden (1903–1996) se věnoval algebře, algebraické geometrii, topologii, teorii čísel a historii matematiky. Jeho slavná učebnice *Moderne Algebra* vyšla poprvé roku 1930 a byla silně ovlivněna přednáškami Emila Artina. Od roku 1931 byl van der Waerden profesorem na univerzitě v Lipsku, kde zůstal i během německé okupace Nizozemska. Po skončení druhé světové války se vrátil do vlasti, měl však potíže získat místo na univerzitě, neboť nedokázal uspokojivě vyvrátit podezření z kolaborace s nacistickým režimem. Od roku 1951 až do konce života působil na univerzitě v Curychu.

vat i obráceně a odvodit Königovu větu pomocí důsledku 2.11: Je-li dán bipartitní regulární graf s částmi V_1 a V_2, definujeme A_i jako množinu všech hran incidentních s i-tým vrcholem z V_1, B_i jako množinu všech hran incidentních s i-tým vrcholem z V_2 a hledáme příslušný systém reprezentantů.[15] Stojí ještě za zmínku, že na van der Waerdenův článek reaguje v tomtéž čísle časopisu *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg* jednostránkovým příspěvkem E. Sperner [29], který podává kratší důkaz věty 2.11 založený na matematické indukci.

Na práce Königa a van der Waerdena přímo navazuje článek Philipa Halla[16] *On representatives of subsets* [13] z roku 1935, ve kterém byla poprvé publikována množinová verze Hallovy věty. Autor v úvodu připomíná důsledek 2.11, který nazývá *Königova věta*, a píše: *In the present note we are concerned with a slightly different problem, viz. with the problem of the existence of a complete system of distinct representatives for a finite collection of (arbitrarily overlapping) subsets of any given set of things.* Hallův důkaz věty 1.1 je založen na indukci vzhledem k počtu množin. Je-li dána n-tice množin $A_1, \ldots, A_n$, pak podle indukčního předpokladu existuje aspoň jeden systém různých reprezentantů pro $A_1, \ldots, A_{n-1}$. Dále stačí ukázat, že množina A_n není obsažena ve všech takových systémech. Hall ukazuje, že pokud jejich průnik obsahuje A_n, pak lze dojít ke sporu; tato část důkazu není zcela přímočará a nebudeme ji podrobněji rozebírat. Dokázané tvrzení pak Hall používá k odvození věty 2.10, kterou zřejmě považuje za hlavní výsledek svého článku.

Hallova věta a věta 2.10 se dále objevují v poměrně nečekané souvislosti, a sice jako pomocná tvrzení ve dvou článcích Wilhelma Maaka a Hermanna Weyla věnovaných skoroperiodickým funkcím.[17] W. Maak v článku [20] z roku 1935 používá větu 2.10 a cituje Hallův článek ze stejného roku, uvádí však svůj vlastní důkaz. V článku H. Weyla [32] z roku 1949 se poprvé objevuje název *marriage theorem*, který je dnes synonymem pro Hallovu větu. Weyl píše: *Given n distinct objects $a_1, \ldots, a_n$ (boys) and n distinct objects $b_1, \ldots, b_n$ (girls); moreover a scheme of linkage Q_n according to which an a_i and a b_k are either linked (friends) or not linked. … What is the necessary and sufficient condition that the boys can be paired with the girls in such a fashion that in each of the n pairs the partners are friends?* Weyl cituje články P. Halla [13] a W. Maaka [20], připojuje však svůj vlastní důkaz Hallovy věty, ve kterém se přidržuje interpretace s chlapci a dívkami.

Krátký a poměrně málo známý důkaz množinové verze Hallovy věty publikovali roku 1949 C. J. Everett a George Whaples [8], kteří píší, že myšlenka důkazu pochází z rozhovoru s Pálem Erdösem. Množinu $I \subset \{1, \ldots, n\}$ nazývají dokonalou, pokud $|\bigcup_{i \in I} A_i| = |I|$. V důkazu pak využívají skutečnosti, že sjednocením a průnikem dokonalých množin je opět dokonalá množina.

Elegantní důkaz Hallovy věty představený v oddíle 1 publikovali Paul R. Halmos a Herbert E. Vaughan v dvoustránkovém článku [14] z roku 1950, jehož názvem *The*

[15] Snadno se ověří, že v regulární bipartitním grafu mají obě části V_1 a V_2 stejný počet vrcholů. Počet množin A_i je tedy stejný jako počet množin B_i a lze použít důsledek 2.11. Stejným postupem lze pomocí věty 2.10 dokázat větu 1.2, jedná se tedy o ekvivalentní výsledky.

[16] Britský matematik Philip Hall (1904–1982) byl předním odborníkem v teorii grup, řada pojmů v algebře nese jeho jméno. Velkou část svého života strávil na univerzitě v Cambridge. V letech 1941–1945 pracoval ve známém dešifrovacím středisku Bletchley Park, kde významně přispěl k prolomení italských a japonských šifer. Za své výsledky v teorii grup získal řadu ocenění.

[17] Jedná se o zobecnění pojmu periodická funkce, jehož autorem je Harald Bohr.

marriage problem pomohli zpopularizovat Weylovu interpretaci Hallovy věty. Autoři problém uvádějí následujícím způsobem: *Suppose that each of a set of boys is acquainted with a finite set of girls. Under what conditions is it possible for each boy to marry one of his acquaintances?* V závěru článku je stručně zmíněna i věta 1.3 v následujícím znění: *A necessary and sufficient condition that each boy b may establish a harem consisting of $n(b)$ of his acqaintances, $n(b) = 1, 2, 3, \ldots$, is that, for every finite subset B_0 of B, the total number of acquaintances of the members of B_0 be at least equal to $\sum n(b)$, where the summation runs over every b in B_0.*

V knize [1] je uvedeno, že Halmos a Vaughan pouze znovuobjevili důkaz z článku Thomase E. Easterfielda [5] z roku 1946. Takové hodnocení se zdá být příliš striktní, neboť v Easterfieldově článku není o Hallově větě jediná zmínka.[18] Autor zde řeší následující problém: *Je dána čtvercová matice o rozměrech $n \times n$; jakým způsobem z ní vybrat n čísel, která se nacházejí v různých řádcích i sloupcích, aby jejich součet byl minimální?*[19] V každém řádku matice může být několik minim, neboť prvky matice nemusejí být navzájem různé. Pokud by bylo možné v každém řádku zvolit jedno minimum tak, aby tato čísla ležela v různých sloupcích, pak by byl problém vyřešen. Tato situace je však spíše výjimečná a Easterfield přechází k popisu obecného algoritmu. Přitom formuluje následující pomocné tvrzení:

Nechť S je podmnožina všech sloupců dané matice. Pak v každém sloupci z S lze najít jedno řádkové minimum a tato minima leží v různých řádcích, právě když pro každou množinu $I \subset S$ platí, že sloupce z I obsahují řádková minima z aspoň $|I|$ řádků.

Důkaz tohoto tvrzení skutečně připomíná Halmosův a Vaughanův důkaz Hallovy věty: Postupuje se indukcí podle velikosti S, přičemž pro $|S| = 1$ je tvrzení triviální. Pro $|S| > 1$ se rozliší dva případy: Buď pro každou neprázdnou vlastní podmnožinu $I \subset S$ platí, že sloupce z I obsahují řádková minima z aspoň $|I|+1$ řádků, nebo existuje neprázdná vlastní podmnožina $I \subset S$ taková, že sloupce z I obsahují řádková minima z právě $|I|$ řádků; v obou případech se důkaz dokončí pomocí indukčního předpokladu.

Věta 2.13 o doplnění latinského obdélníku na čtverec je jednou z klasických aplikací Hallovy věty, jejímž autorem je Marshall Hall Jr[20]. Dvoustránkový článek [10] dokončil roku 1945 v době, kdy pracoval pro americké námořnictvo. Významný je též Hallův

[18] Stojí však za pozornost, že Easterfieldovým školitelem na univerzitě v Cambridge byl Philip Hall. Disertace obhájená roku 1940 nese název *A Classification of Groups of Order p^6*. O rok dříve získal Easterfield Smithovu cenu za esej o teorii grup. Podle dostupných informací pocházel Easterfield z Nového Zélandu, databáze Zentralblatt MATH eviduje celkem 6 jeho publikací. Data narození a úmrtí se nepodařilo dohledat.

[19] Přestože se zdá, že se nejedná o příliš praktický problém, Easterfield píše, že byl inspirován vojenským problémem: *In the course of a piece of organisational research into the problems of demobilisation in the R.A.F., it seemed that it might be possible to arrange the posting of men from disbanded units into other units in such a way that they would not need to be posted again before they were demobilised; and that a study of the numbers of men in the various release groups in each unit might enable this process to be carried out with a minimum number of postings. Unfortunately the unexpected ending of the Japanese war prevented the implications of this approach from being worked out in time for effective use. The algorithm of this paper arose directly in the course of the investigation.*

[20] Americký matematik Marshall Hall Jr (1910–1990) se věnoval především teorii grup, ale též kombinatorice (konečné projektivní roviny, bloková schémata). Spolupracoval s Philipem Hallem, se kterým nebyl v žádném příbuzenském vztahu. Poprvé se setkali v letech 1932–33, kdy M. Hall studoval v Cambridge. Během roku 1944 strávil šest měsíců v Bletchley Park, kde pracoval na luštění japonských a německých šifer. Ke stěžejním pracem M. Halla patří knihy *Theory of Groups* (1959) a *Combinatorial Theory* (1967, druhé vydání 1986).

článek [11] z roku 1948 věnovaný množinové verzi Hallovy věty. Zde je dokázáno, že *pokud množiny $A_1, \dots, A_n$ mají systém různých reprezentantů a velikost nejmenší z nich je $r < n$, pak počet systémů různých reprezentantů pro $A_1, \dots, A_n$ je aspoň* $r!$.[21] Odtud plyne (srov. důkaz věty 2.13), že latinský obdélník o rozměrech $r \times n$, kde $r < n$, lze rozšířit o jeden řádek minimálně $(n-r)!$ způsoby. Celkem tedy existuje minimálně $n!(n-1)!\cdots 2!1!$ latinských čtverců o rozměrech $n \times n$.

Věta 2.16 o velikosti maximálního párování, resp. její maticová podoba 2.15, bývá označována jako Königova či Königova-Egerváryova věta podle Dénese Königa a Jenö Egerváryho[22], kteří tvrzení objevili nezávisle na sobě a publikovali roku 1931 (viz [17], [6]).[23] Pomocí věty 2.16 lze zpětně dokázat Hallovu větu, jedná se tedy o ekvivalentní tvrzení. Skutečně, nechť $G = (V, E)$ je bipartitní graf s částmi V_1 a V_2, ve kterém neexistuje párování pokrývající V_1. Podle věty 2.16 existuje vrcholové pokrytí $K \subset V$, kde $|K| < |V_1|$. Položme $K_1 = K \cap V_1$, $K_2 = K \cap V_2$. Pak $|K_1| + |K_2| = |K| < |V_1|$, a tedy $|K_2| < |V_1| - |K_1| = |V_1 \setminus K_1|$. Z definice vrcholového pokrytí plyne, že z $V_1 \setminus K_1$ nevedou žádné hrany do $V_2 \setminus K_2$. Odtud vyplývá $|N(V_1 \setminus K_1)| \le |K_2| < |V_1 \setminus K_1|$. Tím jsme pomocí věty 2.16 dokázali větu 1.2.

4. Závěr

Ve výčtu výsledků souvisejících s Hallovou větu by bylo možné ještě dlouho pokračovat. Věříme, že i tento stručný přehledový článek dostatečně demonstruje sílu Hallovy věty a její schopnost propojovat zdánlivě nesouvisející problémy.

I v současnosti se objevují nové důkazy Hallovy věty či její varianty. Např. v článku G. F. Bachelise [3] je představen nový krátký důkaz množinové verze Hallovy věty založený na indukci vzhledem k celkovému počtu prvků $\sum_{i=1}^{n} |A_i|$.

R. Ehrenhorg si povšiml, že pokud studujeme existenci perfektního párování v bipartitním grafu, kde obě části mají stejný počet vrcholů, pak podmínka v grafové verzi Hallovy věty není symetrická, neboť v ní vystupují pouze vrcholy z části V_1. V článku [7] ukázal, že ji lze nahradit obecnější podmínkou, v níž hrají obě části V_1 a V_2 rovnocennou roli. E. Shamir a B. Sudakov pak v článku [26] zformulovali poněkud odlišnou podmínku, která je rovněž ekvivalentní s podmínkou z věty 1.2. Jejich výsledky shrnuje následující věta.

Věta 4.1. *Nechť $G = (V, E)$ je bipartitní graf s částmi V_1 a V_2, kde $|V_1| = |V_2| = n$. Pak jsou následující podmínky ekvivalentní:*

[21] Pokud $r \ge n$, pak počet systémů různých reprezentantů je aspoň $r(r-1)\cdots(r-n+1)$; viz [12].

[22] Jenö Egerváry (1891–1958) je považován za jednoho z průkopníků kombinatorické optimalizace, jeho zájmy však byly mnohem širší a zahrnovaly též integrální a diferenciální rovnice, algebru a geometrii. Roku 1914 získal doktorát pod vedením Lipóta Fejéra, poté pracoval v seismologické laboratoři v Budapešti a zároveň se snažil o získání učitelské aprobace. Roku 1917 obdržel povolávací rozkaz, posléze byl však prohlášen za neschopného služby, přestože byl aktivním sportovcem a horolezcem (zdolal např. Gerlachovský štít). Roku 1919 se habilitoval na univerzitě Františka Josefa; ta dočasně sídlila v Budapešti, kam se přesunula z Rumunskem obsazeného Kolozsváru. Následně došlo k jejímu dalšímu stěhování do Szegedu, není však jasné, jestli zde Egerváry někdy vyučoval. Od 30. let až roku 1958 působil na univerzitách v Budapešti a v Maďarské akademii věd. Krátce po odchodu do důchodu ukončil svůj život sebevraždou, pravděpodobně následkem tíživé situace během komunistických represí po Maďarském povstání.

[23] Na počest Königa a Egerváryho je pojmenován i tzv. maďarský algoritmus pro hledání párování v ohodnoceném úplném bipartitním grafu, které minimalizuje součet hranových ohodnocení. Podrobnější komentář k Egerváryho článku [6] lze najít v [22].

1. *V grafu G existuje perfektní párování.*
2. *Pro jistá $p, q \in \mathbb{N}_0$ splňující $p + q = n$ platí, že každá množina vrcholů $W \subset V_1$ s více než p prvky a každá množina vrcholů $W \subset V_2$ s více než q prvky má aspoň $|W|$ sousedů.*
3. *Pro jistá $p, q \in \mathbb{N}_0$ splňující $p + q = n$ platí, že každá množina vrcholů $W \subset V_1$ s nejvýše p prvky a každá množina vrcholů $W \subset V_2$ s nejvýše q prvky má aspoň $|W|$ sousedů.*

Poznamenejme, že při volbě $p = 0$, $q = n$, resp. $p = n$, $q = 0$ se podmínky 2 a 3 redukují na podmínku z věty 1.2.

Jinou zajímavou otázkou, které byla věnována pozornost již od 30. let 20. století, je platnost Hallovy věty pro nekonečné množiny či grafy. Klasický příklad $A_1 = \mathbb{N}$, $A_i = \{i - 1\}$ pro $i \in \{2, 3, 4, \ldots\}$ ukazuje, že pro nekonečný systém obsahující nekonečné množiny věta obecně neplatí – přestože je splněna Hallova podmínka, systém různých reprezentantů neexistuje. Již P. Hall však ve svém článku z roku 1935 [13] ukázal, že věta platí pro konečný systém libovolných (konečných i nekonečných) množin. M. Hall v roce 1948 dokázal pomocí Zornova lemmatu variantu Hallovy věty pro libovolný (i nespočetný) systém konečných množin [11]. Halmos a Vaughan v článku z roku 1950 [14] uvádějí jiný důkaz založený na Tichonovově větě o kartézském součinu kompaktních topologických prostorů. Důkaz M. Halla lze najít i v knize [12], kde je následně odvozeno zobecnění důsledku 2.11 na nekonečné systémy množin. Odtud snadno plyne platnost důsledku 2.12 pro nekonečné grupy G nebo např. skutečnost, že každé dvě báze nekonečněrozměrného vektorového prostoru mají stejnou mohutnost.

V článku jsme se zabývali existencí perfektního párování v bipartitních grafech, ale neřešili jsme otázku, jak takové párování nalézt. Halmosův-Vaughanův důkaz Hallovy věty uvedený v oddíle 1 je krátký a elegantní, ale nekonstruktivní. V literatuře lze najít poněkud delší důkazy Hallovy věty, které zároveň dávají praktický návod k nalezení požadovaného párování, viz např. [4]. Existují též efektivní algoritmy pro hledání maximálního párování v bipartitních grafech. Je dobře známo, že úlohu lze převést na hledání maximálního toku v síti; Fordův-Fulkersonův (resp. Edmondsův-Karpův) algoritmus pak dává pro bipartitní graf $G = (V, E)$ řešení v čase $O(|V| \cdot |E|)$, viz např. [21]. Asymptoticky rychlejší je Hopcroftův-Karpův algoritmus s časovou složitostí $O(\sqrt{|V|} \cdot |E|)$, viz např. [33].

Poděkování. Článek byl podpořen grantem GA ČR registrační číslo 18-00449S.

L i t e r a t u r a

[1] Aigner, M., Ziegler, G. M.: *Proofs from THE BOOK* (6th edition). Springer, 2018.

[2] Ardila, F., Stanley, R. P.: *Tilings.* Math. Intell. 32 (2010), 32–43.

[3] Bachelis, G. F.: *A short proof of Hall's theorem on SDRs.* Amer. Math. Monthly 109 (2002), 473–474.

[4] Bryant, V.: *Aspects of combinatorics. A wide-ranging introduction.* Cambridge University Press, 1993.

[5] Easterfield, T. E.: *A combinatorial algorithm.* J. Lond. Math. Soc. 21 (1946), 219–226.

[6] Egerváry, J.: *Matrixok kombinatórius tulajdonságairól*. Mat. Fiz. Lapok 38 (1931), 16–28.

[7] Ehrenborg, R: *An unbiased marriage theorem*. Amer. Math. Monthly 122 (2015), 59.

[8] Everett, C. J., Whaples, G.: *Representations of Sequences of Sets*. Amer. J. Math. 71 (1949), 287–293.

[9] Frobenius, G.: *Über zerlegbare Determinanten*. Sitzber. König. Preuss. Akad. Wiss. 18 (1917), 274–277.

[10] Hall, M.: *An existence theorem for Latin squares*. Bull. Amer. Math. Soc. 51 (1945), 387–388.

[11] Hall, M.: *Distinct representatives of subsets*. Bull. Amer. Math. Soc. 54 (1948), 922–926.

[12] Hall, M.: *Combinatorial Theory (2nd ed.)*. John Wiley & Sons, 1986.

[13] Hall, P.: *On representatives of subsets*. J. Lond. Math. Soc. 10 (1935), 26–30.

[14] Halmos, P. R., Vaughan, H. E.: *The marriage problem*. Amer. J. Math. 72 (1950), 214–215.

[15] König, D.: *Über Graphen und ihre Anwendung auf Determinantentheorie und Mengenlehre*. Math. Ann. 77 (1916), 453–465.

[16] König, D.: *Graphok és alkalmazásuk a determinánsok és a halmazok elméletére*. Math. és Termész. Ért. 34 (1916), 104–119.

[17] König, D.: *Graphok és matrixok*. Mat. Fiz. Lapok 38 (1931), 116–119.

[18] Landau, H. G.: *On dominance relations and the structure of animal societies III. The condition for a score structure*. Bull. Math. Biophys. 15 (1953), 143–148.

[19] Leep, D. B., Myerson, G.: *Marriage, Magic, and Solitaire*. Amer. Math. Monthly 106 (1999), 419–429.

[20] Maak, W.: *Eine neue Definition der fastperiodischen Funktionen*. Abh. Math. Semin. Hamb. Univ. 11 (1935), 240–244.

[21] Mareš, M., Valla, T.: *Průvodce labyrintem algoritmů*. CZ.NIC, 2017.

[22] Martello, S.: *Jenö Egerváry: from the origins of the Hungarian algorithm to satellite communication*. Cent. Eur. J. Oper. Res. 18 (2010), 47–58.

[23] Miller, G. A.: *On a method due to Galois*. Quart. J. Math. 41 (1910), 382–384.

[24] O'Connor, J. J., Robertson, E. F.: *MacTutor History of Mathematics archive* [online]. Dostupné z: `http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/`

[25] Pach, J., Morić, F.: *Graph Theory (Spring 2013)* [online]. Dostupné z: `http://sma.epfl.ch/~moric/gt2013/`

[26] Shamir, E., Sudakov, B.: *Two-sided, unbiased version of Hall's marriage theorem*. Amer. Math. Monthly 124 (2017), 79–80.

[27] Schneider, H.: *The concepts of irreducibility and full indecomposability of a matrix in the works of Frobenius, König and Markov*. Linear Algebra Appl. 18 (1977), 139–162.

[28] Smetaniuk, B.: *A new construction on Latin squares. A proof of the Evans conjecture*. Ars Combin. 11 (1981), 155–172.

[29] Sperner, E.: *Note zu der Arbeit von Herrn B. L. van der Waerden: „Ein Satz über Klasseneinteilungen von endlichen Mengen“*. Abh. Math. Semin. Univ. Hamb. 5 (1927), 232.

[30] Strang, G.: *Introduction to applied mathematics.* Wellesley-Cambridge Press, 1986.

[31] van der Waerden, B. L.: *Ein Satz über Klasseneinteilungen von endlichen Mengen.* Abh. Math. Semin. Univ. Hamb. 5 (1927), 185–187.

[32] Weyl, H.: *Almost periodic invariant vector sets in a metric vector space.* Amer. J. Math. 71 (1949), 178–205.

[33] Wikipedia contributors: *Hopcroft–Karp algorithm.* Wikipedia, The Free Encyclopedia [online]. Dostupné z: `https://en.wikipedia.org/wiki/Hopcroft-Karp_algorithm`

[34] Zhan, X.: *Matrix theory.* American Mathematical Society, 2013.