Cvičení 8

Úloha 1. Najděte všechna $x \in \mathbb{Z}$, pro která platí

(a) $x \equiv 5 \pmod 7$, $x \equiv 4 \pmod 8$, $x \equiv 2 \pmod 9$,
(b) $2x + 1 \equiv 2 \pmod 3$, $3x + 2 \equiv 3 \pmod 4$, $4x + 3 \equiv 2 \pmod 5$,
(c) $10x \equiv 6 \pmod{32}$ a $3x \equiv 1 \pmod 5$,
(d) $x^{11} \equiv 2 \pmod 5$ a $x^8 \equiv 1 \pmod 7$.

Úloha 2. Spočítejte všechna $x \in \mathbb{Z}$ splňující

(a) $x^2 \equiv 1 \pmod 3$ a $x^2 \equiv 1 \pmod 7$,
(b) $x^2 \equiv -1 \pmod{65}$,
(c) $x^2 \equiv 36 \pmod{45}$.

Úloha 3. Najděte všechny kořeny polynomů

(a) $x^2 - 1$ nad $\mathbb{Z}_{21}$,
(b) $x^2 + 1$ nad $\mathbb{Z}_{65}$,
(c) $x^2 + 3x + 2$ nad $\mathbb{Z}_{14}$.

Úloha 4. Nechť jsou p a q dvě různá lichá prvočísla.

(a) Dokažte, že má polynom $x^3 + 3x^2 + 2x$ v okruhu $\mathbb{Z}_{pq}$ právě 9 kořenů.
(b) Rozhodněte, zda existují $a, b \in \mathbb{Z}_{pq}$, aby měl polynom $x^2 + ax + b$ v okruhu $\mathbb{Z}_{pq}$ právě 3 kořeny.

Ve hře *druhé nejmenší nevybrané* si každý hráč zvolí kladné celé číslo, přičemž vyhrává ten, který si zvolil druhé nejmenší číslo, které si nezvolil žádný jiný hráč. V případě neexistence takového hráče vyhrává cvičící. Hrajeme jednak v rámci každého cvika zvlášť, jednak v rámci obou cvik zároveň. Je zakázáno jakkoliv komunikovat o svých volbách s ostatními.

identifikátor (jméno/přezdívka...): jen toto cviko: ☐ obě cvika: ☐
cviko: 15:40/16:30