Proseminář z Matematické analýzy, LS 2024 – 2025
Teoretické příklady

TP1. (na 28. února) Nechť P je polynom stupně $n \geq 2$, který má pouze reálné kořeny. Dokažte, že pak všechny kořeny polynomu P' jsou též reálné.

TP2. (na 28. února) Nechť f je spojitá funkce na $[0, 1]$, která má ve všech bodech intervalu $(0, 1)$ vlastní derivaci. Předpokládejme, že $f(0) = f(1) = 0$ a existuje $x_0 \in (0, 1)$ takové, že $f(x_0) = 1$. Dokažte, že pak $|f'(c)| > 2$ pro nějaké $c \in (0, 1)$.

TP3. (na 7. března) Spočtěte

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{2^{n+1}} \cos \frac{3}{2^{n+1}}.$$

TP4. (na 14. března) Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost nezáporných reálných čísel taková, že $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje. Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$.

TP5. (na 14. března) Rozhodněte, zda existuje posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ kladných čísel taková, že obě řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{a} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 a_n}$$

konvergují.

TP6. (na 14. března) Rozhodněte, zda existují nerostoucí posloupnosti nezáporných čísel $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ takové, že řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergují, ale

$$\sum_{n=1}^{\infty} \min\{a_n, b_n\}$$

konverguje.

TP7. (na 4. dubna) Nechť $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$, $n \in \mathbb{N}$. Nalezněte bijekci $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takovou, že $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)}$ diverguje.

TP8. (na 4. dubna) Vyšetřete konvergenci řady

$$1 + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{7}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \cdots$$

vytvořené postupným střídáním dvou kladných a jednoho záporného členu řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$.

TP9. (na 4. dubna) Nechť $x \in (-1,1)$. Určete součet řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}.$$

Hint: Interpretujte řadu výše jako Cauchyův součin řad.

TP10. (na 28. března) Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{m=1}^{\infty} b_m$ jsou divergentní řady reálných čísel. Musí být jejich Cauchyův součin též divergentní řada?

TP11. (na 4. dubna) Nechť f je spojitá kladná funkce na $[0,1]$. Spočtěte

$$\int_0^1 \frac{f(x)}{f(x)+f(1-x)}\,dx.$$

TP12. (na 4. dubna) Nechť f je spojitá sudá funkce na $[-1,1]$. Dokažte, že

$$\int_{-1}^1 \frac{f(x)}{1+e^x}\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx.$$

TP13. (na 11. dubna) Pro $n \in \mathbb{N}$ spočtěte

$$\frac{1}{1}\binom{n}{0} - \frac{1}{3}\binom{n}{1} + \frac{1}{5}\binom{n}{2} - \cdots + (-1)^n \frac{1}{2n+1}\binom{n}{n}.$$

Hint: K výpočtu použijte integrál $\int_0^1 (1-x^2)^n\,dx$.

TP14. (na 11. dubna) Nechť $c \in [-1,1]$ a nechť je funkce f dána vztahem

$$f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x}, & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}; \\ c, & x = 0. \end{cases}$$

Pro které hodnoty c má funkce f primitivní funkci na celém $\mathbb{R}$?