Proseminář z Matematické analýzy, ZS 2021 – 2022
Teoretické příklady

TP1. (na 12. října) Nechť $\{a_k\}_{k=1}^n$ je konečná posloupnost reálných čísel splňující $a_k > -1$, $k = 1, \dots, n$. Předpokládejme zároveň, že $a_k > 0$ pro $k = 1, \dots, n$, nebo $a_k < 0$ pro $k = 1, \dots, n$. Dokažte, že

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \dots (1 + a_n) \geq 1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

TP2. (na 12. října) Nechť $\{a_k\}_{k=1}^n$ je konečná aritmetická posloupnost kladných reálných čísel. Dokažte, že

$$\sqrt{a_1 a_n} \leq \sqrt[n]{a_1 \dots a_n}.$$

TP3. (na 19. října) Nechť $\alpha > 0$, $a_1, \dots, a_n$, $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$. Dokažte, že

$$\left| \sum_{k=1}^n a_k b_k \right| \leq \frac{1}{\alpha} \sum_{k=1}^n a_k^2 + \frac{\alpha}{4} \sum_{k=1}^n b_k^2.$$

TP4. (na 2. listopadu) Zkonstruujte bijekci mezi $(0, 1)$ a $(0, 1]$.

TP5. (na 2. listopadu) Nalezněte supremum a infimum množiny

$$A = \left\{ \frac{m}{n} :\ m, n \in \mathbb{N},\ m < 3n \right\}.$$

TP6. (na 2. listopadu) Nalezněte supremum a infimum množiny

$$B = \left\{ \sqrt{n} - \lfloor \sqrt{n} \rfloor :\ n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Připomeňme, že $\lfloor x \rfloor$ značí dolní celou část čísla x, tedy největší celé číslo, které je menší nebo rovno číslu x.

TP7. (na 9. listopadu) Rozhodněte, zda posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ daná vztahem

$$a_n = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$$

konverguje nebo diverguje. Připomeňme, že

$$(2n)!! = (2n) \cdot (2n-2) \cdots 4 \cdot 2,$$

$$(2n+1)!! = (2n+1) \cdot (2n-1) \cdots 3 \cdot 1.$$

TP8. (na 16. listopadu) Spočtěte

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} \right).$$

TP9. (na 16. listopadu) Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel splňující $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$. Spočtěte
$$\lim_{n\to\infty} \frac{na_1 + (n-1)a_2 + \cdots + a_n}{n^2}.$$

TP10. (na 16. listopadu) Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost kladných čísel splňující $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$. Spočtěte
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}.$$

TP11. (na 23. listopadu) Pro dané $k \in \mathbb{N}$ spočtěte
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^k + 2^k + \cdots + n^k}{n^{k+1}}.$$

TP12. (na 23. listopadu) Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je omezená posloupnost splňující
$$a_{n+1} \geq a_n - \frac{1}{2^n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$
Dokažte, že posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je konvergentní.

TP13. (na 30. listopadu) Najděte monotónní funkci $f : [0,1] \to [0,1]$, která má nekonečně mnoho bodů nespojitosti.

TP14. (na 30. listopadu) Existuje funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, která má v každém bodě limitu ∞?

TP0. (příklad navíc) (na 7. prosince) Najděte omezenou funkci na $[0,1]$, která nenabývá svého minima na žádném intervalu $[a,b] \subseteq [0,1]$ splňujícím $a < b$.

TP15. (na 7. prosince) Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je periodická funkce splňující $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$. Dokažte, že $f(x) = 0$ pro každé $x \in \mathbb{R}$.

TP16. (na 7. prosince) Najděte nekonstantní funkci $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, která je periodická s periodou 1 a zároveň periodická s periodou $\sqrt{2}$.

TP17. (na 14. prosince) Najděte spojitou funkci $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, která nabývá každé své hodnoty právě třikrát.

TP18. (na 14. prosince) Existuje spojitá funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, která nabývá každé své hodnoty právě dvakrát?

TP19. (na 21. prosince) Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňuje $f(1) = 2$ a $f'(1) = 1$. Spočtěte
$$\lim_{x\to 1} \frac{2x - f(x)}{x - 1}.$$

TP20. (na 21. prosince) Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňuje $f(1) = 1$ a $f'(1) = 2$. Spočtěte

$$\lim_{x \to 1} (f(x))^{\frac{1}{\log x}}.$$

TP21. (na 4. ledna) Najděte všechny spojité funkce $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ splňující

$$f(xy) = f(x) + f(y), \quad x, y \in (0, \infty).$$

TP22. (na 4. ledna) Najděte všechny spojité funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, pro které platí následující implikace: Jsou-li x, y reálná čísla splňující $x-y \in \mathbb{Q}$, pak $f(x) - f(y) \in \mathbb{Q}$.