

Cvičení z Matematické analýzy 2

Letní semestr 2023-2024

1. cvičení

1. Vyšetřete konvergenci následujících řad.

- (i) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2+2n+4}{n^2+3}$
- (ii) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{3}{2^n-2n}$
- (iii) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n^3+1} - \sqrt{n^3-1})$
- (iv) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+2n}{4^n+3n}$
- (v) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+1}$
- (vi) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^3}{n^3+1}$
- (vii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+4^n}{4^n+5^n}$
- (viii) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+\cos n}{2+\cos n} \right)^n$
- (ix) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2+4}-\sqrt[3]{n^2+1}}{\sqrt[3]{n}}$
- (x) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3+\frac{1}{n})^n}$
- (xi) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\sqrt[n]{n}}}$
- (xii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n-1}}{\sqrt{(n^2-n+1)^{n+1}}}$
- (xiii) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\sqrt[3]{n}}$
- (xiv) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+6}-\sqrt{n+1}}{\sqrt[n]{n^n+3n!+4^n}}$

2. Zkonstruujte posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ takové, že $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverguje, ale $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ konverguje.

Výsledky: 1. (i) diverguje; (ii) konverguje; (iii) konverguje; (iv) konverguje; (v) diverguje; (vi) diverguje; (vii) konverguje; (viii) konverguje; (ix) konverguje; (x) konverguje; (xi) diverguje; (xii) konverguje; (xiii) konverguje; (xiv) konverguje.

2. cvičení

1. Vyšetřete konvergenci následujících řad.

- (i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{nx}}{n}$, $x \in \mathbb{R}$
- (ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{(n+\frac{1}{n})^n}$
- (iii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$
- (iv) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$
- (v) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$
- (vi) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{nx}}{n^2}$, $x \in \mathbb{R}$
- (vii) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^{n(n-1)}$
- (viii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n} \binom{2n}{n}$
- (ix) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{n^n}$
- (x) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3(\sqrt{2}+(-1)^n)^n}{2^n}$
- (xi) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n} \binom{2n}{n}$

2. Zkonstruujte kladnou posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ takovou, že $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, ale $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

Výsledky: 1. (i) konverguje pro $x < 0$, diverguje pro $x \geq 0$; (ii) diverguje; (iii) konverguje; (iv) konverguje; (v) konverguje; (vi) konverguje pro $x \leq 0$, diverguje pro $x > 0$; (vii) konverguje; (viii) konverguje; (ix) diverguje; (x) diverguje; (xi) diverguje.

3. cvičení

1. Vyšetřete konvergenci následujících řad.

- (i) $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - \cos \frac{1}{n}) n^a$, $a \in \mathbb{R}$
- (ii) $\sum_{n=1}^{\infty} (\log \frac{1}{n^\beta} - \log(\sin \frac{1}{n^\beta}))$, $\beta > 0$
- (iii) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{\sqrt{n}}$
- (iv) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sin \frac{1}{n} - \frac{1}{n}) \frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$
- (v) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n})$
- (vi) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{e^{\sqrt{n+1}}}{e^{\sqrt{n}}} - 1 \right)^3$
- (vii) $\sum_{n=1}^{\infty} (e - (1 + \frac{1}{n})^n)^p$, $p \in \mathbb{R}$
- (viii) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sin(\frac{1}{\sqrt{n}}) - \log(1 + \frac{1}{\sqrt[3]{n}}) \right)$

2. Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost nezáporných reálných čísel. Rozhodněte, zda platí

- (i) pokud $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ konverguje, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje;
- (ii) pokud $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ konverguje.

Výsledky: 1. (i) konverguje pro $a < 1$, diverguje pro $a \geq 1$; (ii) konverguje pro $\beta > 1/2$, diverguje pro $\beta \leq 1/2$; (iii) diverguje; (iv) konverguje pro $\alpha > -2$, diverguje pro $\alpha \leq -2$; (v) konverguje; (vi) konverguje; (vii) konverguje pro $p > 1$, diverguje pro $p \leq 1$; (viii) diverguje.

2. (i) ne; (ii) ano.

4. cvičení

1. Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci následujících řad.

- (i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n-100\sqrt{n}}$
- (ii) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{z^n}{n}$, $z \in \mathbb{R}$
- (iii) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\log(\log n)}$
- (iv) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, $x \in \mathbb{R}$
- (v) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\sqrt[n]{3} - 1)$
- (vi) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2+2}$
- (vii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+(-1)^n}$
- (viii) $\sum_{n=1}^{\infty} \cos(n\pi) \log \frac{n^2-1}{n^2+1}$
- (ix) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, $x \in \mathbb{R}$

2. Najděte nezápornou posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ takovou, že $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, ale $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ diverguje.

Výsledky: 1. (i) konverguje neabsolutně; (ii) pro $|z| < 1$ konverguje absolutně, pro $|z| > 1$ diverguje, pro $z = 1$ konverguje neabsolutně, pro $z = -1$ diverguje; (iii) konverguje neabsolutně; (iv) konverguje absolutně pro $x \in \mathbb{R}$; (v) konverguje neabsolutně; (vi) konverguje neabsolutně; (vii) konverguje neabsolutně; (viii) konverguje absolutně; (ix) pro $|x| < 1$ konverguje absolutně, pro $|x| > 1$ diverguje, pro $|x| = 1$ konverguje neabsolutně.

5. cvičení

1. Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci následujících řad.

- (i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n)}{\sqrt{n}}$
- (ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \cdot \frac{2n^2+1}{n^2}$

- (iii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{\sqrt{n}} \arctan n$
2. Vyšetřete konvergenci následujících řad.
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\frac{n\pi}{3})}{\log(\log n)}$
 - $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n}$
 - $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n+\frac{1}{n})}{\log^2 n}$
3. Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci následujících řad.
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{3n-100\sqrt{n}}$
 - $\sum_{n=1}^{\infty} \cos(n^2)(\sqrt{n^6+n} - n^3)$
 - $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+2}{n+3} \cos(n\pi)$
4. (i) Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje. Rozhodněte, zda pak musí konvergovat i $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n-1} + a_{2n})$.
(ii) Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n-1} + a_{2n})$ konverguje. Rozhodněte, zda pak musí konvergovat i $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Výsledky: 1. (i) konverguje neabsolutně; (ii) konverguje neabsolutně; (iii) konverguje neabsolutně.
2. (i) konverguje; (ii) diverguje; (iii) konverguje.
3. (i) konverguje neabsolutně; (ii) konverguje absolutně; (iii) diverguje.
4. (i) ano; (ii) ne.

6. cvičení

1. Dokažte, že následující řady konvergují pro všechna $z \in \mathbb{C}$ z dané množiny.
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}, |z| \leq 1$
 - $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} z^n, |z| < 4$
 - $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n}}, |z| < 1$
 - $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n+2^n}{n^2} (z-1)^n, |z-1| \leq \frac{1}{6}$
2. Vyšetřete konvergenci následujících řad.
- $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2+1}-n}{\log n}$
 - $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{n}{2}+\binom{n}{3}}{\binom{n}{4}+\binom{n}{5}}$
 - $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)\sqrt{n+1}} \cos(3n+2)$
 - $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{n} - \log(1 + \frac{1}{n}))n \sin 2n$
 - $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin^2 n}{n}$
3. Najděte posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ takové, že $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverguje a $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$.

Výsledky: 2. (i) diverguje; (ii) konverguje; (iii) konverguje; (iv) konverguje; (v) konverguje.

7. cvičení

1. Vyhádřete primitivní funkce na maximálních intervalech existence:
- $\int (x^{10} - e^x + \frac{2}{x} - \cos x) dx$
 - $\int \tan^2 x dx$
 - $\int x^3 e^x dx$
 - $\int e^x \sin x dx$
 - $\int \frac{1}{(3x+2)^2} dx$
 - $\int \frac{1}{x^2+4x+5} dx$
 - $\int \frac{1}{2x+3} dx$
 - $\int \frac{x^2+3x+6}{x^4} dx$
 - $\int x^2 \cos x dx$
 - $\int \frac{1}{x^2+2x+2} dx$

- (xi) $\int x \arctan x \, dx$
 (xii) $\int \log 2x \, dx$
 (xiii) $\int e^{ax} \cos bx \, dx, a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$
 (xiv) $\int x e^x \cos x \, dx$

Výsledky (až na konstantu): 1. (i) $\frac{x^{11}}{11} - e^x + 2 \log|x| - \sin x$ na $(-\infty, 0)$ a $(0, \infty)$; (ii) $\tan x - x$ na každém z intervalů $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$; (iii) $x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6x e^x - 6e^x$ na \mathbb{R} ; (iv) $-\frac{1}{2}e^x \cos x + \frac{1}{2}e^x \sin x$ na \mathbb{R} ; (v) $-\frac{1}{3(3x+2)}$ na $(-\infty, -\frac{2}{3})$ a $(-\frac{2}{3}, \infty)$; (vi) $\arctan(x+2)$ na \mathbb{R} ; (vii) $\frac{1}{2} \log|x + \frac{3}{2}|$ na $(-\infty, -\frac{3}{2})$ a $(-\frac{3}{2}, \infty)$; (viii) $-\frac{1}{x} - \frac{3}{2x^2} - \frac{2}{x^3}$ na $(-\infty, 0)$ a $(0, \infty)$; (ix) $x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x$ na \mathbb{R} ; (x) $\arctan(x+1)$ na \mathbb{R} ; (xi) $\frac{x^2}{2} \arctan x - \frac{x}{2} + \frac{\arctan x}{2}$ na \mathbb{R} ; (xii) $x \log(2x) - x$ na $(0, \infty)$; (xiii) $\frac{a}{a^2+b^2} e^{ax} \cos bx + \frac{b}{a^2+b^2} e^{ax} \sin bx$ na \mathbb{R} ; (xiv) $\frac{1}{2}e^x(x \sin x + x \cos x - \sin x)$ na \mathbb{R} .

8. cvičení

1. Vyjádřete primitivní funkce na maximálních intervalech existence:

- (i) $\int \frac{x}{1+x^4} \, dx$
 (ii) $\int \tan x \, dx$
 (iii) $\int \sqrt{x^6} \, dx$
 (iv) $\int \cot g x \, dx$
 (v) $\int \frac{x^2}{\cos^2(x^3)} \, dx$
 (vi) $\int \frac{\log x}{x\sqrt{1+\log x}} \, dx$
 (vii) $\int \cos^5 x \sqrt{\sin x} \, dx$
 (viii) $\int \frac{\arctan e^x}{e^x} \, dx$
 (ix) $\int \frac{1}{\sin x} \, dx$
 (x) $\int |2x+1| \, dx$
 (xi) $\int |\cos x| \, dx$

2. Nechť f a g jsou funkce definované na \mathbb{R} . Rozhodněte o platnosti následujících implikací:

- (i) Pokud existuje primitivní funkce k f a g na \mathbb{R} , pak existuje i primitivní funkce k $f+g$ na \mathbb{R} .
 (ii) Pokud existuje primitivní funkce k $f+g$ na \mathbb{R} , pak existuje i primitivní funkce k f a g na \mathbb{R} .

Výsledky (až na konstantu): 1. (i) $\frac{1}{2} \arctan(x^2)$ na \mathbb{R} ; (ii) $-\log|\cos x|$ na každém z intervalů $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$; (iii) $\frac{x^4}{4} \operatorname{sgn} x$ na \mathbb{R} ; (iv) $\log|\sin x|$ na každém z intervalů $(k\pi, \pi+k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$; (v) $\frac{1}{3} \tan(x^3)$ na každém z intervalů $(\sqrt[3]{-\frac{\pi}{2} + k\pi}, \sqrt[3]{\frac{\pi}{2} + k\pi})$, $k \in \mathbb{Z}$; (vi) $\frac{2}{3}(1+\log x)^{\frac{3}{2}} - 2(1+\log x)^{\frac{1}{2}}$ na $(\frac{1}{e}, \infty)$; (vii) $\frac{2}{3}(\sin x)^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{7}(\sin x)^{\frac{7}{2}} + \frac{2}{11}(\sin x)^{\frac{11}{2}}$ na každém z intervalů $(2k\pi, 2k\pi + \pi)$, $k \in \mathbb{Z}$; (viii) $-e^{-x} \arctan e^x - \frac{1}{2} \log \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}$ na \mathbb{R} ; (ix) $\log|\tan \frac{x}{2}|$ na každém z intervalů $(k\pi, k\pi + \pi)$, $k \in \mathbb{Z}$;

$$(x) F(x) = \begin{cases} -x^2 - x, & x \in (-\infty, -\frac{1}{2}), \\ x^2 + x + \frac{1}{2}, & x \in [-\frac{1}{2}, \infty) \end{cases};$$

$$(xi) F(x) = \begin{cases} \sin x + 4k, & x \in [-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi], \\ -\sin x + 4k + 2, & x \in (\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi), \end{cases} k \in \mathbb{Z}$$

2. (i) platí; (ii) neplatí.

9. cvičení

1. Vyjádřete primitivní funkce na maximálních intervalech existence:

- (i) $\int \frac{x}{x^2-x+2} \, dx$
 (ii) $\int \frac{x^3-4x-6}{x^3-5x^2+6x} \, dx$
 (iii) $\int \frac{x^{17}-5}{x^2-1} \, dx$
 (iv) $\int \frac{x}{x^3-1} \, dx$

$$(v) \int \frac{x^2}{(x+2)^2(x+4)^2} dx$$

$$(vi) \int \frac{dx}{x^4-1}$$

$$(vii) \int \frac{dx}{x^4+1}$$

Výsledky (až na konstantu): 1. (i) $\frac{1}{2} \log(x^2 - x + 2) + \frac{1}{\sqrt{7}} \arctan(\frac{2x-1}{\sqrt{7}})$ na \mathbb{R} ; (ii) $x - \log|x| + 3 \log|x - 3| + 3 \log|x - 2|$ na $(-\infty, 0), (0, 2), (2, 3)$ a $(3, \infty)$; (iii) $\frac{x^{16}}{16} + \frac{x^{14}}{14} + \dots + \frac{x^2}{2} + 3 \log|x + 1| - 2 \log|x - 1|$ na $(-\infty, -1), (-1, 1)$ a $(1, \infty)$; (iv) $\frac{1}{6} \log \frac{(x-1)^2}{x^2+x+1} + \frac{\sqrt{3}}{3} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}}$ na $(-\infty, 1)$ a $(1, \infty)$; (v) $2 \log|\frac{x+4}{x+2}| - \frac{5x+12}{(x+2)(x+4)}$ na $(-\infty, -4), (-4, -2)$ a $(-2, \infty)$; (vi) $\frac{1}{4} \log|x - 1| - \frac{1}{4} \log|1 + x| - \frac{1}{2} \arctan x$ na $(-\infty, -1), (-1, 1)$ a $(1, \infty)$; (vii) $-\frac{1}{4\sqrt{2}} \log(x^2 - \sqrt{2}x + 1) + \frac{1}{4\sqrt{2}} \log(x^2 + \sqrt{2}x + 1) + \frac{1}{2\sqrt{2}} \arctan(\sqrt{2}x - 1) + \frac{1}{2\sqrt{2}} \arctan(\sqrt{2}x + 1)$ na \mathbb{R} .

10. cvičení

1. Vyjádřete primitivní funkce na maximálních intervalech existence:

$$(i) \int \frac{dx}{(x^2-x+1)^2}$$

$$(ii) \int \frac{e^{2x}}{1+e^x} dx$$

$$(iii) \int \frac{1}{x(\log^4 x-1)} dx$$

$$(iv) \int \frac{dx}{(x^2+1)^2}$$

$$(v) \int \frac{x^2}{(x^2+2x+2)^2} dx$$

$$(vi) \int \frac{x^2+x}{x^6+3x^4+3x^2+1} dx$$

$$(vii) \int \frac{1}{e^{2x}+e^x-2} dx$$

$$(viii) \int \frac{2 \log^2 x+3}{x \log^4 x-x \log^2 x-6x} dx$$

2. Sestrojte funkci f , která má primitivní funkci na celém \mathbb{R} , ale není spojitá v 0.

Výsledky (až na konstantu): 1. (i) $\frac{4}{3\sqrt{3}}(\arctan(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}) + \frac{\sqrt{3}(2x-1)}{(2x-1)^2+3})$ na \mathbb{R} ; (ii) $e^x - \log(1 + e^x)$ na \mathbb{R} ; (iii) $-\frac{1}{4} \log|\log x + 1| + \frac{1}{4} \log|\log x - 1| - \frac{1}{2} \arctan \log x$ na $(0, \frac{1}{e}), (\frac{1}{e}, e)$ a (e, ∞) ; (iv) $\frac{1}{2} \arctan x + \frac{1}{2} \frac{x}{x^2+1}$ na \mathbb{R} ; (v) $\arctan(x+1) + \frac{1}{x^2+2x+2}$ na \mathbb{R} ; (vi) $\frac{1}{8} \arctan x + \frac{x^3-x-2}{8(x^2+1)^2}$ na \mathbb{R} ; (vii) $-\frac{x}{2} + \frac{1}{3} \log|e^x - 1| + \frac{1}{6} \log(e^x + 2)$ na $(-\infty, 0)$ a $(0, \infty)$; (viii) $\frac{1}{5\sqrt{2}} \arctan(\frac{\log x}{\sqrt{2}}) + \frac{9}{10\sqrt{3}} \log \left| \frac{\log x - \sqrt{3}}{\log x + \sqrt{3}} \right|$ na $(0, e^{-\sqrt{3}}), (e^{-\sqrt{3}}, e^{\sqrt{3}})$ a $(e^{\sqrt{3}}, \infty)$.

11. cvičení

1. Vyjádřete primitivní funkce na maximálních intervalech existence:

$$(i) \int \frac{1}{x} \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} dx$$

$$(ii) \int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+4x-3}}$$

$$(iii) \int \frac{dx}{1+\sqrt{x^2+2x+2}}$$

$$(iv) \int \frac{1}{x} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx$$

$$(v) \int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-3x+2}}$$

$$(vi) \int \frac{x}{\sqrt{x^2+2x+4}} dx$$

$$(vii) \int \frac{x-1}{x(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2})} dx$$

$$(viii) \int \sqrt{\frac{1-e^{2x}}{e^{2x}+2e^x+1}} dx$$

Výsledky (až na konstantu): 1. (i) $-\log|\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} - 1| + \log|\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} + 1| - 2\arctan\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$ na $(-\infty, -1)$ a $(1, \infty)$; (ii) $-2\arctan\sqrt{\frac{3-x}{x-1}}$ na $(1, 3)$; (iii) $-\frac{2}{\sqrt{x^2+2x+2}-x} - \log(\sqrt{x^2+2x+2} - x - 1)$ na \mathbb{R} ; (iv) $2\arctan\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + \log|1 - \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}| - \log|1 + \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}|$ na $(-1, 0)$ a $(0, 1)$; (v) $2\operatorname{sgn}(x-1)\sqrt{\frac{x-2}{x-1}}$ na $(-\infty, 1)$ a $(1, 2)$; (vi) $\frac{1}{2}(\sqrt{x^2+2x+4} - x) + \log(\sqrt{x^2+2x+4} - x + 1) + \frac{3}{2(\sqrt{x^2+2x+4}-x-1)}$ na \mathbb{R} ; (vii) $6(\frac{\sqrt[3]{x}}{2} - \sqrt[6]{x}) + \log\sqrt[6]{x} + \frac{1}{\sqrt[6]{x}} - \frac{1}{2\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{3\sqrt{x}}$ na $(0, \infty)$; (viii) $-2\arctan\sqrt{\frac{1-e^x}{1+e^x}} - \log|1 - \sqrt{\frac{1-e^x}{1+e^x}}| + \log|1 + \sqrt{\frac{1-e^x}{1+e^x}}|$ na $(-\infty, 0)$.

13. cvičení

1. Vyjádřete primitivní funkce na maximálních intervalech existence:

- (i) $\int (\tan x)^5 dx$
- (ii) $\int \frac{3+\cos x}{2+\sin x} dx$
- (iii) $\int \frac{\cos^3 x}{2-\sin x} dx$
- (iv) $\int \frac{dx}{\sin x \cos^2 x}$
- (v) $\int \frac{3\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x + 3\cos^2 x} dx$
- (vi) $\int \frac{dx}{1+\sin x}$

Výsledky (až na konstantu): 1. (i) $-\log|\cos x| - \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{4\cos^4 x}$ na každém z intervalů $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$;

(ii)

$$F(x) = \begin{cases} \log(1 + \frac{\sin x}{2}) + 2\sqrt{3}\arctan(\frac{1}{\sqrt{3}}(2\tan\frac{x}{2} + 1)) + 2\sqrt{3}k\pi, & x \in (-\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi), \\ \sqrt{3}\pi + 2\sqrt{3}\pi k, & x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}; \end{cases}$$

(iii) $2\sin x + \frac{\sin^2 x}{2} + 3\log|\sin x - 2|$ na \mathbb{R} ; (iv) $\frac{1}{\cos x} - \frac{1}{2}\log(\cos x + 1) + \frac{1}{2}\log|\cos x - 1|$ na každém z intervalů $(\frac{k\pi}{2}, \frac{(k+1)\pi}{2})$, $k \in \mathbb{Z}$;

(v)

$$F(x) = \begin{cases} \frac{4}{\sqrt{3}}\arctan(\frac{\tan x}{\sqrt{3}}) - x + \frac{4k\pi}{\sqrt{3}}, & x \in (-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi), \\ (\frac{4}{\sqrt{3}} - 1)(\frac{\pi}{2} + k\pi), & x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}; \end{cases}$$

(vi)

$$F(x) = \begin{cases} -\frac{2}{1+\tan\frac{x}{2}}, & x \in (-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi) \setminus \{\pi + 2k\pi\}; \\ 0, & x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

14. cvičení

1. Spočtěte určité integrály:

- (i) $\int_0^{\frac{3}{2}\pi} \frac{3+\cos x}{2+\sin x} dx$
- (ii) $\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x} dx$
- (iii) $\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x}{1+\sin^2 x} dx$
- (iv) $\int_0^{100\pi+\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2-\sin x} dx$

2. S použitím Riemannova integrálu spočtěte limity:

- (i) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n})$
- (ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^p + 2^p + \dots + n^p}{n^{p+1}}$, $p > 1$

3. Sestrojte omezenou funkci f na $(0, 1)$, která je na $(0, 1)$ spojitá, ale není tam stejnoměrně spojitá.

Výsledky: 1. (i) $\frac{4}{\sqrt{3}}\pi - \log 2$; (ii) $\frac{\pi}{2}$; (iii) $2\pi - \sqrt{2}\pi$; (iv) $50\frac{2\pi}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan(\frac{2}{\sqrt{3}} \tan \frac{\pi}{8} - \frac{1}{\sqrt{3}}) + \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$.
 2. (i) $\log 2$; (ii) $\frac{1}{p+1}$.

15. cvičení

1. Spočtěte určité integrály:

- (i) $\int_0^1 xe^{-x} dx$
- (ii) $\int_0^2 x^2 e^{-x^3} dx$
- (iii) $\int_0^1 \sqrt{4-x^2} dx$
- (iv) $\int_0^1 \frac{\sqrt{2x+1}}{(x+2)^2} dx$
- (v) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{3x}}{(e^x+2)^2(e^x+1)^2} dx$
- (vi) $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{2+\cos x}{2+\sin x+\cos x} dx$

2. Vyšetřete konvergenci následujících integrálů:

- (i) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^5+2}}$
- (ii) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3+5x+3}}$
- (iii) $\int_0^1 \frac{x-\sin x}{x^{\alpha}} dx, \alpha \in \mathbb{R}$
- (iv) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+x^3}$
- (v) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}+x^{\beta}}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

3. Sestrojte posloupnost funkcí $f_k : [0, 1] \rightarrow [0, \infty)$ takovou, že $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = 0$ pro všechna $x \in [0, 1]$, ale $\int_0^1 f_k(x) dx = 1$ pro $k \in \mathbb{N}$. V tomto případě

$$1 = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^1 f_k(x) dx \neq \int_0^1 (\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x)) dx = 0,$$

a tedy obecně nelze prohodit limitu a integrál.

Výsledky: 1. (i) $1 - \frac{2}{e}$; (ii) $\frac{1}{3}(1 - e^{-8})$; (iii) $\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$; (iv) $\frac{\pi}{6\sqrt{3}} + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3}$; (v) $3 - 4 \log 2$; (vi) $\pi(1 + \frac{1}{\sqrt{7}})$.
 2. (i) konverguje; (ii) konverguje; (iii) konverguje pro $\alpha < 4$; (iv) diverguje; (v) konverguje pro $\max\{\alpha, \beta\} > 1 > \min\{\alpha, \beta\}$.

16. cvičení

1. Vyšetřete konvergenci následujících integrálů:

- (i) $\int_1^{\infty} \frac{x-\sin x}{x^{\alpha}} dx, \alpha \in \mathbb{R}$
- (ii) $\int_0^1 \frac{\log x}{1-x^2} dx$
- (iii) $\int_0^{\infty} x^{\alpha}(\arctan x)^{\beta} dx, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$
- (iv) $\int_0^{\infty} \frac{1-\cos x}{x^{\frac{5}{2}}} dx$
- (v) $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$
- (vi) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\frac{1}{\sin x}) dx$
- (vii) $\int_0^{\infty} \sin(\sqrt{x^{2\alpha}+1} - x^{\alpha}) dx$
- (viii) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\cos x) \tan^{\alpha} x dx$
- (ix) $\int_0^1 \frac{\arccos x}{\log^{\alpha}(\frac{1}{x})} dx$
- (x) $\int_0^{\infty} (\pi - 2 \arctan x)^{\alpha} dx$

Výsledky: 1. (i) konverguje pro $\alpha > 2$; (ii) konverguje; (iii) konverguje pro $\alpha + \beta > -1, \alpha < -1$; (iv) konverguje; (v) konverguje; (vi) konverguje; (vii) konverguje pro $\alpha > 1$; (viii) konverguje pro $\alpha \in (-3, 1)$; (ix) konverguje pro $\alpha < \frac{3}{2}$; (x) konverguje pro $\alpha > 1$.