

Zkoušková písemka z Teorie míry a integrálu 1
23. ledna 2025

Příklad 1. (15 bodů) Spočtěte

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \frac{1 - \cos \sqrt{\frac{x}{n}}}{x\sqrt{2+x}} dx.$$

Příklad 2. (20 bodů) Nechť je funkce F dána předpisem

$$F(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(1 + a \cos^2 x) \tan x dx.$$

- (i) Nalezněte definiční obor funkce F (tj. určete, pro která $a \in \mathbb{R}$ platí $F(a) \in \mathbb{R}$).
- (ii) Dokažte, že F je na svém definičním oboru spojitá.
- (iii) Pro všechna a z vnitřku definičního oboru F spočtěte $F'(a)$.

Příklad 3. (15 bodů) Nechť je množina M dána předpisem

$$M = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq \frac{1}{4}(|x| + |y|)\sqrt{4 - z^2} \right\}.$$

Spočtěte $\int_M z^2 d\mathcal{L}_3(x, y, z)$.