

**Zkoušková písemka z Teorie míry a integrálu 1**  
**30. ledna 2025**

**Příklad 1.** (15 bodů) Vyjádřete integrál

$$\int_0^{\infty} \cos 3x \sin(e^{-x}) dx$$

jako součet řady reálných čísel.

**Příklad 2.** (20 bodů) Následující úlohu vyřešte pro  $b = 0$  a pro  $b = 2025$ .

Nechť je funkce  $F$  dána předpisem

$$F(a) = \int_0^1 \frac{\arctan x^a - \arctan x^b}{x \log x} dx.$$

- (i) Nalezněte definiční obor funkce  $F$  (tj. určete, pro která  $a \in \mathbb{R}$  platí  $F(a) \in \mathbb{R}$ ).
- (ii) Pro všechna  $a$  z definičního oboru  $F$  spočtěte  $F(a)$ .

**Příklad 3.** (15 bodů) Nechť je množina  $M$  dána předpisem

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x^2 + y^2 + 3z^2)^3 < 3(x^2 + y^2 - 3z^2), z \geq 0\}.$$

Spočtěte  $\int_M z d\mathcal{L}_3(x, y, z)$ .