

1. zápočtová písemka z Teorie míry a integrálu 1
26. listopadu 2025

Příklad 1. (5 bodů) Pro $n \in \mathbb{N}$ uvažujme funkci $f_n(x) = n^2 x^{-4} e^{-\frac{n}{x}}$.

- (i) Odůvodněte měřitelnost funkce f_n na $(1, \infty)$.
- (ii) Odůvodněte, proč $\int_1^\infty f_n(x) dx$ existuje.
- (iii) Pro každé $x \in (1, \infty)$ spočtěte $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$.
- (iv) Spočtěte $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^\infty f_n(x) dx$.

Příklad 2. (5 bodů) Uvažujme funkci $f(x) = \frac{\sqrt{x} \log x}{1-x^2}$.

- (i) Odůvodněte měřitelnost funkce f na $(0, 1)$.
- (ii) Odůvodněte, proč $\int_0^1 f(x) dx$ existuje.
- (iii) Vyjádřete $\int_0^1 f(x) dx$ jako součet řady reálných čísel.

Příklad 3. (bonus) Necht' f_n je posloupnost nezáporných měřitelných funkcí na $(0, 1)$ splňující $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = 0$. Musí potom platit $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$ pro s.v. $x \in (0, 1)$?