KALKULUS 1, LETNÍ SEMESTR 2021–2022
POPIS PŘEDMĚTU A INFORMACE K ZÁPOČTU A KE ZKOUŠCE

Popis předmětu

Jde o druhou část čtyřsemestrálního základního kursu matematické analýzy pro studenty oboru Finanční matematika. Věnuje se základům Taylorova polynomu, integrálního počtu, obyčejných diferenciálních rovnic a úvodu do diferenciálního počtu funkcí více proměnných. Kurs se skládá z přednášek a cvičení, je hodnocen zápočtem a zkouškou.

Přednáška se koná pro větší množství studentů najednou, přičemž přednášející u tabule vykládá především teoretické poznatky a ilustrativní příklady. Otázky v průběhu přednášky a diskuse po ní jsou vítány, jiná forma studentské aktivity se nepředpokládá. Z látky přednášené na přednášce je potřeba složit zkoušku.

Cvičení se koná pro menší množství studentů najednou. Na cvičeních se počítají příklady určené k procvičení dané tématiky. S aktivní účastí studentů (někdy i u tabule) se počítá. Náplň a formu cvičení určuje cvičící. Z početních technik prováděných na cvičeních je potřeba získat zápočet.

Zápočet

Přesné podmínky pro udělení zápočtu určuje cvičící. Postačující podmínkou pro získání zápočtu typicky bude dostatečná účast na cvičení a dvě úspěšně napsané zápočtové písemky. Studenti, kteří se cvičení pravidelně účastní, ale některou ze zápočtových písemek nenapíší, dostanou možnost si písemku opravit dodatečným vypracováním příkladů zadaných cvičícím.

Zkouška

Ke zkoušce budou připuštěni pouze ti studenti, kteří v okamžiku začátku zkoušky budou mít v SISu zapsán zápočet. Vzhledem k termínům zápočtových písemek bude výjimkou předtermín, kterého se lze zúčastnit i bez předchozího získání zápočtu (studenti, kteří zkoušku složí v předtermínu, mají ale stále povinnost získat zápočet ze cvičení). Zkouška bude mít dvě části - písemnou a ústní. K tomu, aby student mohl skládat ústní část, musí nejprve úspěšně absolvovat písemnou část. Pokud student neuspěje u zkoušky a má právo na opravný termín, musí znovu absolvovat celou zkoušku (tedy včetně písemné části bez ohledu na předchozí výsledek písemné části). Na písemnou i ústní část s sebou student přinese doklad totožnosti (např. ISIC, občanský průkaz nebo cestovní pas).

Termíny zkouškových písemek na květen a červen jsou vypsány v SISu, kde se na ně lze přihlašovat. Později bude vypsán ještě jeden termín v září.

Písemná část zkoušky bude obsahovat čtyři početní příklady z látky probírané v průběhu semestru. Konkrétně půjde o příklady z následujících partií:

- Výpočet primitivní funkce nebo určitého integrálu (10 bodů)
- Konvergence určitého integrálu (10 bodů)
- Řešení obyčejné diferenciální rovnice (10 bodů)
- Výpočet limity pomocí Taylorova polynomu nebo výpočet parciálních derivací (10 bodů)

Celkem bude tedy možné z písemné části získat 40 bodů. Jestliže student získá alespoň 21 bodů, postoupí k ústní části. Jestliže student získá z písemné části 20 nebo méně bodů, bude jeho zkouška hodnocena známkou neprospěl(a).

Čas k vypracování písemné části je 120 minut. Povoleny budou pouze běžné psací potřeby a tahák o velikosti jedné strany A4, který si student pro účely zkouškové písemky může sám připravit.

Odevzdané písemky budou typicky opraveny v den konání písemné části zkoušky (výjimkou bude předtermín, kdy budou písemky opraveny až následující den). Studentům, kteří úspěšně složí písemnou část zkoušky, bude emailem zaslán čas ústní části zkoušky. Tento čas zkoušky bude pro všechny studenty závazný. Pokud se student nemůže z vážného důvodu zúčastnit zkoušky v daném čase, je povinen co nejdříve kontaktovat přednášející a domluvit se s ní na náhradním termínu ústní části. Studentům, jejichž písemná část zkoušky bude hodnocena známkou neprospěl(a), bude do SISu zapsána známka 4. Tito studenti budou mít možnost seznámit se s hodnocením své písemné práce, projeví-li o to zájem.

Ústní část zkoušky se bude typicky konat následující pracovní den po písemné části zkoušky (výjimkou bude opět předtermín, kdy se ústní část bude konat dva dny po písemce). Při ústní části zkoušky bude student mít za úkol zformulovat několik definic a vět z přednášky a rovněž prokázat, že těmto definicím a větám rozumí a je schopen je aplikovat v konkrétních případech. Dále pak bude student dotázán na jedno z témat z přednášky a měl by být schopen přehledově na dané téma poreferovat - v rámci této otázky bude student dotázán na důkazy. Při ústní části zkoušky může student používat pouze běžné psací potřeby, žádné další pomůcky nebudou povoleny.

Orientační hodnocení jednotlivých otázek bude následující:

- znění jedné definice a dvou vět (4+4+4 body)
- poreferování na některé z témat z přednášky (28 bodů, z toho 20 bodů za důkazy)

K úspěšnému složení ústní části zkoušky je třeba získat alespoň 24 bodů. Zkoušku tedy není možné složit bez alespoň částečné znalosti důkazů.

Celkové hodnocení zkoušky

Student složí zkoušku, pokud získá alespoň 21 bodů z písemné části a alespoň 24 bodů z ústní části. K celkovému hodnocení známkou *výborně* je navíc třeba získat dohromady za obě části alespoň 70 bodů, a k celkovému hodnocení známkou *velmi dobře* je třeba získat dohromady alespoň 58 bodů. Pokud student složí zkoušku, ale získá dohromady méně než 58 bodů, bude jeho zkouška hodnocena známkou *dobře*.

Vzorová zadání písemné části zkoušky z minulých let lze najít na stránce
`https://www.karlin.mff.cuni.cz/~cuth/archiv/MFF/Kalkulus/kalkulus1_zkPis_web.pdf`

Letošní zkouškové písemky budou mít podobnou strukturu i obtížnost, pouze bodování bude trochu pozměněno (viz informace výše).

Seznam definic a vět, jejichž znalost bude požadována při ústní části zkoušky:

Definice:

Taylorův polynom
symbol malé *o*
Taylorova řada, Maclaurinova řada
primitivní funkce
Newtonův integrál
absolutně konvergentní, konvergentní a divergentní Newtonův integrál
Riemannův integrál
dělení intervalu, norma dělení
Riemannův-Stieltjesův integrál
diferenciální rovnice, řád diferenciální rovnice
řešení diferenciální rovnice (maximální, obecné, prodloužení řešení)
diferenciální rovnice se separovanými proměnnými
homogenní diferenciální rovnice 1. řádu
lineární diferenciální rovnice 1. a 2. řádu
fundamentální systém

lineární diferenciální rovnice 2. řádu s konstantními koeficienty
charakteristický polynom
eukleidovská metrika, maximová metrika
otevřená množina, vnitřní bod, vnitřek
otevřená koule, interval v $\mathbb{R}^n$, otevřený interval v $\mathbb{R}^n$
konvergence v $\mathbb{R}^n$
uzavřená množina
funkce n proměnných: spojitost v bodě a spojitost na množině
limita funkce více proměnných
parciální derivace

Věty:

Taylorův polynom
Peanův tvar zbytku (Věta 1.1)
O jednoznačnosti Taylorova polynomu (Věta 1.3)
Aritmetika malého o (Věta 1.4) - stačí důkaz jedné z vlastností
Malé o složené funkce (Věta 1.5)
Taylorův polynom základních funkcí (Věta 1.6) - stačí důkaz pro jednu z funkcí
Lagrangeův tvar zbytku (Věta 1.7) - bez důkazu
Taylorovy řady elementárních funkcí (Věta 1.9) - stačí důkaz pro jednu z funkcí

Primitivní funkce
Vlastnosti primitivní funkce (Věta 2.1)
Vztah spojitosti a existence primitivní funkce (Věta 2.2) - bez důkazu
Linearita primitivní funkce (Věta 2.3)
Integrace per partes (Věta 2.4)
První věta o substituci (Věta 2.5)
Druhá věta o substituci (Věta 2.6)
Lepení primitivních funkcí (Věta 2.7)
Rozklad polynomu s reálnými koeficienty (Věta 2.8) - bez důkazu
Rozklad na parciální zlomky (Věta 2.9) - bez důkazu

Newtonův a Riemannův integrál
Vlastnosti Newtonova integrálu (Věta 3.1) - stačí důkaz čtyř vlastností
Per partes pro Newtonův integrál (Věta 3.2) - bez důkazu
Substituce pro Newtonův integrál (Věta 3.3) - bez důkazu
Spojitost a Riemannův integrál (Věta 3.4) - bez důkazu
Spojitost a Newtonův integrál (Věta 3.5) - bez důkazu
Vztah Riemannova a Newtonova integrálu (Věta 3.6) - bez důkazu

Konvergence Newtonova integrálu
Srovnávací kritérium pro konvergenci Newtonova integrálu (Věta 3.8)
Limitní srovnávací kritérium pro konvergenci Newtonova integrálu (Věta 3.9)
Vztah absolutní konvergence a konvergence Newtonova integrálu (Věta 3.10) - bez důkazu
Abelovo-Dirichletovo kritérium konvergence Newtonova integrálu (Věta 3.11) - bez důkazu

Riemannův-Stieltjesův integrál
Vlastnosti Riemannova-Stieltjesova integrálu (Věta 3.12) - stačí důkaz jedné z vlastností
Kritérium existence Riemannova-Stieltjesova integrálu (Věta 3.13) - bez důkazu

Monotonie a Riemannův-Stieltjesův integrál (Věta 3.14)
Spojitost a Riemannův-Stieltjesův integrál (Věta 3.15) - bez důkazu
Vztah Riemannova a Riemannova-Stieltjesova integrálu (Věta 3.17) - bez důkazu
Integrace vzhledem k Heavisideově funkci (Věta 3.18) - bez důkazu
Součet řady jako Riemannův-Stieltjesův integrál (Věta 3.19) - bez důkazu

Obyčejné diferenciální rovnice 1. řádu
O existenci řešení separované rovnice (Věta 4.1) - stačí důkaz existence řešení
Lemma o lepení řešení separované rovnice (Lemma 4.2)
O existenci řešení lineární diferenciální rovnice 1. řádu (Věta 4.3) - bez důkazu

Obyčejné diferenciální rovnice 2. řádu
Existence řešení lineární diferenciální rovnice 2. řádu (Věta 4.4) - bez důkazu
Struktura řešení lineární diferenciální rovnice 2. řádu (Věta 4.5)
Kritérium pro lineární nezávislost řešení homogenní rovnice (Věta 4.6)
Variace konstant (Věta 4.7)
Tvar fundamentálního systému rovnice 2. řádu s konstantními koeficienty (Věta 4.8)
Speciální pravá strana (Věta 4.9) - bez důkazu

Funkce více proměnných
Porovnání eukleidovské a maximové metriky (Lemma 5.1)
Základní vlastnosti eukleidovské metriky (Lemma 5.2) - bez důkazu
Vlastnosti otevřených množin (Věta 5.3)
Vlastnosti konvergence v $\mathbb{R}^n$ (Věta 5.4)
Vztah otevřených a uzavřených množin (Věta 5.5)
Vlastnosti uzavřených množin (Věta 5.6) - bez důkazu
Operace zachovávající spojitost (Věta 5.8) - bez důkazu
Spojitost a otevřené / uzavřené množiny (Věta 5.9)

Jako téma pro “poreferování” bude zadáno jedno z výše uvedených témat zvýrazněných italikou.

Příklad zadání ústní části:

1. *Napište definici pojmu:* Taylorův polynom
2. *Napište znění věty:* Tvar fundamentálního systému rovnice 2. řádu s konstantními koeficienty
3. *Napište znění věty:* Spojitost a Riemannův integrál
4. *Poreferujte na téma:* Konvergence Newtonova integrálu