KALKULUS 2, ZIMNÍ SEMESTR 2022–2023
POPIS PŘEDMĚTU A INFORMACE K ZÁPOČTU A KE ZKOUŠCE

Popis předmětu

Jde o třetí část čtyřsemestrálního základního kursu matematické analýzy pro studenty oboru Finanční matematika. Věnuje se pokročilejším partiím diferenciálního počtu funkcí více proměnných, posloupnostem a řadám funkcí a základům teorie míry. Kurs se skládá z přednášek a cvičení, je hodnocen zápočtem a zkouškou.

Přednáška se koná pro větší množství studentů najednou, přičemž přednášející u tabule vykládá především teoretické poznatky a ilustrativní příklady. Otázky v průběhu přednášky a diskuse po ní jsou vítány, jiná forma studentské aktivity se nepředpokládá. Z látky přednášené na přednášce je potřeba složit zkoušku.

Cvičení se koná pro menší množství studentů najednou. Na cvičeních se počítají příklady určené k procvičení dané tématiky. S aktivní účastí studentů (někdy i u tabule) se počítá. Náplň a formu cvičení určuje cvičící. Z početních technik prováděných na cvičeních je potřeba získat zápočet.

Zápočet

Přesné podmínky pro udělení zápočtu určuje cvičící. Postačující podmínkou pro získání zápočtu bude alespoň 50% účast na cvičeních a dvě úspěšně napsané zápočtové písemky. Studenti, kteří se cvičení pravidelně účastní, ale některou ze zápočtových písemek nenapíší, dostanou možnost si písemku opravit dodatečným vypracováním příkladů zadaných cvičící.

Zkouška

Získání zápočtu bude nutnou podmínkou pro přihlášení se ke zkoušce. Zkouška bude mít dvě části - písemnou a ústní. K tomu, aby student mohl skládat ústní část, musí nejprve úspěšně absolvovat písemnou část. Pokud student neuspěje u zkoušky a má právo na opravný termín, musí znovu absolvovat celou zkoušku (tedy včetně písemné části bez ohledu na předchozí výsledek písemné části).

Písemná část zkoušky bude obsahovat pět příkladů z látky probírané v průběhu semestru. Konkrétně půjde o příklady z následujících partií:

• Věta o implicitní funkci nebo Lebesgueův-Stieltjesův integrál (10 bodů)
• Extrémy funkcí více proměnných (10 bodů)
• Stejnoměrná konvergence posloupností funkcí nebo řad funkcí nebo mocninné řady (10 bodů)
• Vícerozměrná integrace (10 bodů)
• Záměna limity a integrálu nebo řady a integrálu nebo integrál závislý na parametru (10 bodů)

Celkem bude tedy možné z písemné části získat 50 bodů. Jestliže student získá alespoň 26 bodů, postoupí k ústní části. Jestliže student získá z písemné části méně než 26 bodů, bude jeho zkouška hodnocena známkou neprospěl(a).

Čas k vypracování písemné části je 120 minut. Povoleny budou pouze běžné psací potřeby a tahák o velikosti jedné strany A4, který si student pro účely zkouškové písemky může sám připravit.

Odevzdané písemky budou opraveny v den konání písemné části zkoušky. Studentům, kteří úspěšně složí písemnou část zkoušky, bude emailem zaslán čas ústní části zkoušky. Tento čas zkoušky bude pro všechny studenty závazný. Pokud se student nemůže z vážného důvodu zúčastnit zkoušky v daném čase, je povinen co nejdříve kontaktovat přednášející a domluvit se s ní na náhradním termínu ústní části. Studentům, jejichž písemná část zkoušky bude hodnocena známkou neprospěl(a), bude do SISu zapsána známka 4. Tito studenti budou mít možnost seznámit se s hodnocením své písemné práce, projeví-li o to zájem.

Ústní část zkoušky se bude typicky konat následující pracovní den po písemné části zkoušky. V první části ústní zkoušky bude student mít za úkol zformulovat několik definic a vět z přednášky a rovněž prokázat, že těmto definicím a větám rozumí a je schopen ilustrovat jejich použití na příkladech. Při ústní části zkoušky může student používat pouze běžné psací potřeby, žádné další pomůcky nebudou povoleny.

Orientační hodnocení jednotlivých otázek bude následující:
• znění dvou definic (5+5 bodů)
• znění čtyř vět (5+5+5+5 bodů)

K úspěšnému složení zkoušky je třeba získat alespoň 21 bodů z této části zkoušky. Student, jehož součet za písemku a první část ústní zkoušky bude navíc alespoň 58 bodů, bude rovněž dotázán na důkaz jedné z vět z první části ústní zkoušky. Za tuto otázku je možné získat maximálně 10 bodů.

Celkové hodnocení zkoušky

Student složí zkoušku, pokud získá alespoň 26 bodů z písemné části a alespoň 21 bodů z první části ústní zkoušky. K celkovému hodnocení známkou *výborně* je navíc třeba získat dohromady za všechny části zkoušky alespoň 80 bodů, a k celkovému hodnocení známkou *velmi dobře* je třeba získat dohromady alespoň 68 bodů. Pokud student složí zkoušku, ale získá dohromady méně než 68 bodů, bude jeho zkouška hodnocena známkou *dobře*.

Vzorová zkoušková písemka

Příklad 1. (10 bodů) Ukažte, že rovnice

$$2e^{x-\frac{y}{4}} - x + \frac{y}{4} + \sqrt{3x + y^2} = \frac{5}{2}$$

určuje v jistém okolí bodu $(\frac{1}{16}, \frac{1}{4})$ implicitně zadanou funkci $y = \varphi(x)$. Spočtěte $\varphi'(\frac{1}{16})$.

Příklad 2. (10 bodů) Nalezněte supremum a infimum funkce

$$f(x, y) = e^{xy-y-2x+2}$$

na množině

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \in [0, 3], \ y \in [1, 4], \ x + y \leq 4\}.$$

Příklad 3. (10 bodů) Nechť je funkce f dána předpisem

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{\pi} \arctan(x - 3) \right)^n .$$

(i) Nalezněte definiční obor funkce f (tj. určete, pro která $x \in \mathbb{R}$ platí $f(x) \in \mathbb{R}$).

(ii) Dokažte, že funkce f je spojitá v bodě 3.

Příklad 4. (10 bodů) Spočtěte integrál

$$\int_M \sqrt{x^2 + y^2} \, d\lambda^3(x, y, z),$$

kde $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 + 4z^2 \leq 4, \ x \geq 0, \ y \leq 0\}$.

Příklad 5. (10 bodů) Vyjádřete integrál

$$\int_0^{\infty} \frac{1 - \cos x}{x^2} \ e^{-x} \, dx$$

jako součet řady reálných čísel.

Seznam definic a vět, jejichž znalost bude požadována při ústní části zkoušky. Věty označené **D** budou vyžadovány i s důkazem (v takovém rozsahu, v jakém byl důkaz předveden na přednášce).

Definice:
spojitost funkce více proměnných v bodě a na množině
parciální derivace prvního a vyššího řádu
funkce třídy $\mathcal{C}^k$
extrémy funkce na množině (ostré, lokální, globální)
gradient, stacionární bod
Hessova matice
kompaktní množina
bodová a stejnoměrná konvergence posloupnosti funkcí
bodová a stejnoměrná konvergence řad funkcí
mocninná řada
měřitelný prostor, měřitelná množina
borelovská množina
prostor s mírou
úplná míra
vnější míra
Lebesgueova míra, lebesgueovsky měřitelné množiny
měřitelné zobrazení
charakteristická funkce množiny
Lebesgueův integrál
Jacobiho matice, jacobián, regulární zobrazení
Lebesgueova–Stieltjesova funkce intervalu
Lebesgueova–Stieltjesova míra
Lebesgueův–Stieltjesův integrál
Gamma funkce
Beta funkce
σ-konečná míra
absolutně spojitá míra
Radonova-Nikodýmova derivace míry

Věty:
O nabývání mezihodnot (Věta 1.1) **D**
Vztah parciálních derivací a spojitosti (Věta 1.2)
O implicitní funkci (Věta 1.3) **D**
Nutná podmínka existence lokálního extrému (Věta 1.4) **D**
Postačující podmínky pro existenci lokálního extrému (Věta 1.5)
O nabývání extrémů (Věta 1.6)
Lagrangeova věta o multiplikátoru (Věta 1.7)
Záměnnost parciálních derivací (Věta 1.8)
Kritérium stejnoměrné konvergence (Věta 2.1) **D**
Weierstrassovo kritérium (Věta 2.2) **D**

Zachování spojitosti při stejnoměrné konvergenci (Věta 2.3)
Záměna sumy a limity (Věta 2.4)
Záměna sumy a derivace (Věta 2.5)
Záměna sumy a integrálu (Věta 2.6)
O poloměru konvergence mocninné řady (Věta 2.7) **D**
Derivace a integrace mocninné řady (Věta 2.9)
Abelova věta (Věta 2.10)
Vlastnosti míry (Věta 3.2) **D**
Konstrukce úplné míry (Věta 3.3)
Vlastnosti Lebesgueovy míry (Věta 3.4)
Měřitelnost vzoru (Věta 3.5)
Měřitelnost složené funkce (Věta 3.6) **D**
Vlastnosti měřitelných funkcí (Věta 3.7)
Lebesgueův integrál charakteristické funkce (Věta 3.8) **D**
Aritmetika Lebesgueova integrálu (Věta 3.9 a Důsledek 3.10)
Absolutní konvergence Lebesgueova integrálu (Věta 3.11) **D**
Lebesgueův integrál a nerovnosti (Věta 3.12 a Důsledek 3.13)
Vztah mezi Riemannovým a Lebesgueovým integrálem (Věta 3.14)
Vztah mezi Newtonovým a Lebesgueovým integrálem (Věta 3.15)
Fubiniova věta (Věta 3.16)
O substituci (Věta 3.17)
O zobecněných polárních souřadnicích (Věta 3.18) **D**
O zobecněných válcových souřadnicích (Věta 3.19)
O zobecněných sférických souřadnicích (Věta 3.20)
O Lebesgueově–Stieltjesově funkci intervalu (Věta 3.21)
Vlastnosti Lebesgueovy–Stieltjesovy míry (Věta 3.23)
Vztah Lebesgueova–Stieltjesova a Riemannova–Stieltjesova integrálu (Věta 3.24)
Per partes pro Lebesgueův–Stieltjesův integrál (Věta 3.25)
Pravidla pro počítání Lebesgueova–Stieltjesova integrálu (Věta 3.26) **D**
Záměna limity a integrálu při stejnoměrné konvergenci (Věta 3.27) **D**
Leviho věta (Věta 3.28)
Lebesgueova věta (Věta 3.29)
Leviho věta pro řady (Věta 3.30) **D**
Lebesgueova věta pro řady (Věta 3.31) **D**
Spojitost integrálu závislého na parametru (Věta 3.32) **D**
Derivace integrálu závislého na parametru (Věta 3.33)
Vlastnosti funkce Gamma (Věta 3.34) **D**
Vlastnosti funkce Beta (Věta 3.35) **D**
Radonova-Nikodýmova věta (Věta 3.36)
O integraci vzhledem k hustotě (Věta 3.37)