TEORIE MÍRY A INTEGRÁLU 1, ZIMNÍ SEMESTR 2024–2025
POPIS PŘEDMĚTU A INFORMACE K ZÁPOČTU A KE ZKOUŠCE

Popis předmětu

Jde o základní kurs teorie míry a integrálu pro studenty programu Obecná matematika. Kurs se skládá z přednášek a cvičení, je hodnocen zápočtem a zkouškou.

Zápočet

Postačující podmínkou pro získání zápočtu je alespoň 50% účast na cvičeních a dvě úspěšně napsané zápočtové písemky. Studenti, kteří se cvičení pravidelně účastní, ale některou ze zápočtových písemek nenapíší, dostanou možnost si písemku opravit dodatečným vypracováním příkladů zadaných cvičícím.

Zkouška

Získání zápočtu je nutnou podmínkou pro přihlášení se ke zkoušce. Zkouška se skládá ze dvou částí - písemné a ústní. K tomu, aby student mohl skládat ústní část, musí nejprve úspěšně absolvovat písemnou část. Pokud student neuspěje u zkoušky a má právo na opravný termín, musí znovu absolvovat celou zkoušku (tedy včetně písemné části bez ohledu na předchozí výsledek písemné části).

Písemná část zkoušky se skládá ze tří příkladů, za které lze získat celkem 50 bodů. Konkrétně půjde o příklady z následujících partií:

- Záměna limity a integrálu nebo řady a integrálu (15 nebo 20 bodů)
- Funkce závislá na parametru - výpočet, spojitost, diferencovatelnost (15 nebo 20 bodů)
- Vícerozměrný integrál - Fubiniova věta a věta o substituci (15 nebo 20 bodů)

Jestliže student získá alespoň 25 bodů z této části zkoušky, postoupí k ústní části. Jestliže student získá z písemné části méně než 25 bodů, bude jeho zkouška hodnocena známkou neprospěl(a).

Čas k vypracování písemné části je 90 minut. Povoleny jsou pouze běžné psací potřeby a tahák o velikosti jedné strany A4, který si student pro účely zkouškové písemky může sám připravit.

Odevzdané písemky budou opraveny v den konání písemné části zkoušky. Studentům, kteří úspěšně složí písemnou část zkoušky, bude emailem zaslán čas ústní části zkoušky. Tento čas zkoušky bude pro všechny studenty závazný. Pokud se student nemůže z vážného důvodu zúčastnit zkoušky v daném čase, je povinen co nejdříve kontaktovat přednášející a domluvit se s ní na náhradním termínu ústní části. Studentům, jejichž písemná část zkoušky bude hodnocena známkou neprospěl(a), bude do SISu zapsána známka 4. Tito studenti budou mít možnost seznámit se s hodnocením své písemné práce, projeví-li o to zájem.

Ústní část zkoušky se typicky koná následující pracovní den po písemné části zkoušky. První část ústní zkoušky obsahuje šest otázek uspořádaných a přibližně hodnocených podle následujícího klíče:

- klíčový pojem (0 bodů)
- dvě definice a znění jedné věty (4+4+4 body)
- formulace a důkaz lehké věty (4 body za znění a 8 bodů za důkaz)
- formulace a důkaz těžké věty (4 body za znění a 12 bodů za důkaz)

K úspěšnému složení zkoušky je třeba napsat správně definici klíčového pojmu a získat alespoň 25 bodů z této části zkoušky. Student, jehož součet za písemku a první část ústní zkoušky je navíc alespoň 60 bodů, dostane rovněž doplňkovou otázku na implikace. Za tuto otázku je možné získat maximálně 10 bodů.

Při ústní části zkoušky lze používat pouze běžné psací potřeby, žádné další pomůcky nejsou povoleny. Seznam klíčových pojmů, definic a lehkých a těžkých vět bude k dispozici na konci semestru. Za nezbytnou součást znalosti definic a vět se považuje jejich porozumění a schopnost je používat.

Celkové hodnocení zkoušky

Student úspěšně složí zkoušku, pokud získá alespoň 25 bodů jak z písemné, tak i z ústní části zkoušky a prokáže znalost klíčového pojmu. K celkovému hodnocení známkou *výborně* je navíc třeba získat dohromady za obě části zkoušky alespoň 85 bodů, a k celkovému hodnocení známkou *velmi dobře* je třeba získat dohromady alespoň 70 bodů. Pokud student složí zkoušku, ale získá dohromady méně než 70 bodů, bude jeho zkouška hodnocena známkou *dobře*.

Vzor písemné části zkoušky

Příklad 1. (15 bodů) Vyjádřete integrál

$$\int_0^1 \frac{\log x}{1+x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$$

jako součet řady reálných čísel.

Příklad 2. (20 bodů) Nechť je funkce F dána předpisem

$$F(a) = \int_0^\infty e^{-ax} \frac{1 - \cos x}{x} \, dx.$$

(i) (5 bodů) Nalezněte definiční obor funkce F (tj. určete, pro která $a \in \mathbb{R}$ platí $F(a) \in \mathbb{R}$).
(ii) (10 bodů) Pro všechna a z definičního oboru funkce F spočtěte $F'(a)$.
(iii) (5 bodů) Pro všechna a z definičního oboru funkce F spočtěte $F(a)$.

Příklad 3. (15 bodů) Spočtěte integrál

$$\int_M z \, d\lambda^3(x, y, z),$$

kde $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 + 3z^2 \leq 4z, \ x^2 + y^2 \leq 3z^2, \ x \leq 0\}$.

Vzor ústní části zkoušky

Otázka 1. (0 bodů) Napište definici klíčového pojmu: σ-algebra.

Otázka 2. (4 body) Napište definici pojmu: borelovské zobrazení.

Otázka 3. (4 body) Napište definici pojmu: distribuční funkce.

Otázka 4. (4 body) Napište znění věty: vztah σ-algebry a Dynkinova systému.

Otázka 5. (4+8 bodů) Zformulujte a dokažte větu: Fatouovo lemma.

Otázka 6. (4+12 bodů) Zformulujte a dokažte větu: Radonova-Nikodýmova věta.

Implikace. (10 bodů) Nechť f je měřitelná funkce na $[0, 1]$. Které implikace platí mezi následujícími tvrzeními? Příslušná tvrzení buď dokažte, nebo uveďte protipříklad.
(i) $f \in L^1([0, 1])$;
(ii) $f \in L^2([0, 1])$;
(iii) $f \in L^\infty([0, 1])$.

Seznam klíčových pojmů

- σ-algebra, měřitelný prostor
- borelovské množiny
- míra, prostor s mírou
- měřitelné zobrazení
- jednoduchá funkce
- Lebesgueův integrál nezáporné funkce
- Lebesgueův integrál funkce z $L^1(X, \mu)$

- Dynkinův systém
- prostor $L^p(X, \mu)$, $1 \leq p < \infty$

Seznam definic

- úplná míra
- borelovské zobrazení
- rovnost skoro všude
- nová definice měřitelnosti
- σ-konečná míra
- obdélník, měřitelný obdélník
- součinová σ-algebra
- řezy množiny
- esenciální supremum, prostor $L^\infty(X, \mu)$
- konvergence podle míry
- absolutně spojitá a singulární míra
- znaménková míra
- distribuční funkce
- borelovská míra

Seznam lehkých vět

- Existence nejmenší σ-algebry (Věta 1.1)
- Spojitost míry (Věta 1.2)
- Měřitelnost složeného zobrazení (Věta 1.5)
- Měřitelnost složeného zobrazení v $\mathbb{R}^2$ (Věta 1.6)
- Měřitelnost a limitní přechod (Věta 1.8)
- Aproximace jednoduchými funkcemi (Věta 1.9)
- Leviho věta pro řady (Věta 2.4)
- Fatouovo lemma (Věta 2.5)
- Linearita integrálu (Věta 2.7)
- Lebesgueova věta pro řady (Věta 2.9)
- O spojité závislosti integrálu na parametru (Věta 2.10)
- Vztah σ-algebry a Dynkinova systému (Věta 3.2)
- O jednoznačnosti míry (Věta 3.4)
- O měřitelnosti řezu (Věta 3.5)
- Existence a jednoznačnost součinové míry (Věta 3.7)
- Fubiniova věta (Věta 3.9)
- Vztah konvergence v L^p a konvergence v míře (Věta 4.1)
- Vztah konvergence s.v. a konvergence v míře (Věta 4.2)
- Existence distribuční funkce (Věta 4.6)

Seznam těžkých vět

- Kritérium měřitelnosti (Věta 1.7)

- Leviho věta (Věta 2.2)
- Lebesgueova věta (Věta 2.8)
- O derivaci integrálu podle parametru (Věta 2.11)
- O nejmenším Dynkinově systému (Věta 3.3)
- O měřitelnosti míry řezu (Věta 3.6)
- Radonova-Nikodýmova věta (Věta 4.4)
- Lebesgueův rozklad (Věta 4.5)
- Charakterizace distribuční funkce (Věta 4.7)

Seznam vět bez důkazu

- Zúplnění míry (Věta 1.4)
- O součinu borelovských množin v $\mathbb{R}^n$ (Věta 3.10)
- Věta o substituci (Věta 3.11)
- Hahnův rozklad (Věta 4.3)